P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *209, 234, 246.*

Référence : Stein & Shakarchi, Fourier Analysis.

Théorème de Féjer

On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on identifie les fonctions sur $\mathbb{T}$ à valeurs complexes avec les fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On munit $\mathbb{T}$ de la mesure $\overline{\lambda}$ définie par $\overline{\lambda}(A + 2\pi\mathbb{Z}) = \lambda(A \cap [0, 2\pi])$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, de sorte que pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{T}$ ou dans $L^1(\overline{\lambda})$, on ait

$$\int_{\mathbb{T}} f d\overline{\lambda} = \int_{[0,2\pi[} f d\lambda.$$

Dans la suite, on notera simplement λ, ou « dx » la mesure $\overline{\lambda}$, qui est donc la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

Définition 1. *On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{T}$ est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\, dx = 1,$
2. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx < \infty,$
3. $\forall \delta > 0 \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta \le |x| \le \pi} |K_n(x)|\, dx = 0.$

Théorème 2. *Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{T}$ tel que f soit continue en x, et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{T}$ avec $|y| \le \delta$, on ait $|f(x-y) - f(x)| \le \varepsilon$. D'après la première propriété des bons noyaux, on peut écrire

$$\begin{aligned} (f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(y) f(x-y)\, dy - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(y)\, f(x)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} [f(x-y) - f(x)]\, K_n(y)\, dy. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant au module, on en déduit que

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(x) - f(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(y)|\, K_n(y)\, dy \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\le\delta} \varepsilon\, |K_n(y)|\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi} 2\, \|f\|_\infty\, |K_n(y)|\, dy \\ &\le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |K_n(y)|\, dy + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi} |K_n(y)|\, dy. \end{aligned}$$

D'après les propriétés 2 et 3 des bons noyaux, on a d'une part $\int_{\mathbb{T}} |K_n(y)|\, dy \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)|\, dy$, et d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|\, dx = 0$. Ainsi, par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |(f*K_n)(x) - f(x)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_m(y)|\, dy.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} |(f*K_n)(x) - f(x)| = 0$.

Par ailleurs, si f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{T}$. Ceci provient du fait qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique est uniformément continue. On peut alors choisir δ indépendamment de x, et la limite précédente devient uniforme. □

Définition 3. *On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives $(D_N)_{N\geq 1}$ et $(F_N)_{N\geq 1}$ définies sur $\mathbb{T}$ par :*

$$\forall N \geq 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Théorème 4. *(Théorème de Féjer)*

Pour tout $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $F_N(x) = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, et le noyau de Féjer est un bon noyau.

Cela signifie en particulier, que pour une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int} = (f*D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f.

Démonstration.

La première propriété d'un bon noyau se déduit de la définition de F_N et de la linéarité de la somme et de l'intégrale. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_N(x)\, dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)\, dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(x)\, dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx.
\end{aligned}$$

On conclut que cette intégrale vaut 1 grâce à la relation $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = \delta_{n,0}$, où $\delta_{x,y}$ désigne le symbole de Kronecker.

Pour montrer les deux autres propriétés, on a besoin de calculer explicitement F_N. Pour cela, on commence par calculer D_N.

Pour $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $1 - e^{ix} \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \\
&= e^{-iNx} \times \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-iNx} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \\
&= \frac{1}{N(1-e^{ix})}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-inx} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+1)x}\right) \\
&= \frac{1}{N(1-e^{ix})}\left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}} - \frac{e^{-ix}}{e^{-ix}}\cdot e^{ix}\cdot\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \frac{1}{N(1-e^{ix})}\left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}} + \frac{1-e^{iNx}}{1-e^{-ix}}\right) \\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{2-e^{iNx}-e^{-iNx}}{2-e^{ix}-e^{-ix}} \\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{iNx}-2+e^{-iNx}}{e^{ix}-2+e^{-ix}} \\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et presque tout $x\in\mathbb{T}$, on a $F_N(x)\geq 0$ donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|F_N(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F_N(x)\,dx = 1.$$

En particulier, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|F_N(x)|\,dx = 1 < +\infty$.

Pour démontrer le second point, donnons nous $\delta\in]0,\pi[$, et $x\in\mathbb{T}$ vérifiant $\delta\leq|x|\leq\pi$. Supposons dans un premier temps $x\in[\delta,\pi]$. Alors $\frac{x}{2}\in\left[\frac{\delta}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction sinus est strictement croissante sur cet intervalle, donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\geq\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$. De même, pour $x\in[-\pi,-\delta]$, la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ donc $\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\geq\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En élevant au carré ces deux inégalités (en tenant compte du signe des membres), on obtient $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\geq\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ dans les deux cas.

On en déduit la majoration suivante de F_N :

$$\begin{aligned}
\forall N\in\mathbb{N}^* \qquad |F_N(x)| &\leq \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(F_N)_{N\geq 1}$ est un bon noyau. $\square$