P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *201, 205, 208, 230, 234, 235, 241*

Référence : A retrouver

Théorème de Riesz-Fischer

Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty]$.

Définition 1.

- *Pour $p < +\infty$, on définit l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme l'espace des fonctions f définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que $|f|^p$ est μ-intégrable, i.e telles que $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ soit fini.*

- *Pour $p = +\infty$, on définit l'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme l'espace des fonctions f qui sont μ-essentiellement bornées, i.e telles que $\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : \mu(\{|f| > c\}) = 0\}$ soit fini.*

Quand il n'y a pas de confusion possible, on note plus simplement $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposition 2. *Soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors il existe $N \subset X$ tel que $\mu(N) = 0$ et $|f| \leq \|f\|_\infty$ sur $X \setminus N$.*

Théorème 3. *On a l'inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Définition 4. *On définit l'espace $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par $f \sim g \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$.*

Proposition 5. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Théorème 6. *(Riesz-Fischer)*

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Structure de la preuve.

On commence par le cas où $p < +\infty$. Il s'agit de montrer que l'espace $L^p(\mu)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$. On se donne donc une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments $f_n \in L^p(\mu)$.

1. On montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement vers une fonction f.

2. On vérifie que la convergence a également lieu au sens de la norme $\|\cdot\|_p$.

On traite ensuite le cas $p = +\infty$.

Démonstration.

On commence par le cas où $p<+\infty$.

Quitte à extraire une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le caractère de Cauchy de cette suite nous permet de supposer que l'on a, pour tout $n\geq 1$, $\|f_n-f_{n+1}\|_p\leq 2^{-n}$ $(\star)$.

On pose alors

$$u_0=f_0 \quad \text{et} \quad \text{pour } k\geq 1,\ u_k=f_k-f_{k-1}$$

Alors, pour $N\geq 0$, la somme partielle U_N vérifie $U_N=f_0+f_1-f_0+\cdots+f_N-f_{N-1}=f_N$.

Pour tout $x\in X$, la suite $(V_N(x))_{n\geq 1}$ définie par $\forall N\in\mathbb{N}^* \quad V_N(x)=\sum_{n=0}^{N}|u_n(x)|$ est croissante et positive, donc elle converge vers une limite $V(x)\in[0,+\infty]$.

Via l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X |V_N(x)|^p\,d\mu(x) &= \int_X\left(|f_0|+\sum_{n=1}^{N}|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\right)^p d\mu(x)\\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\int_X|f_n(x)-f_{n-1}(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}+\|f_0\|_p\right)^p\\
&\leq \left(\|f_0\|_p+\sum_{n=1}^{N}2^{-n}\right)^p \text{ d'après } (\star),\\
&\leq (\|f_0\|_p+1)^p.
\end{aligned}$$

Le théorème de convergence monotone assure alors que

$$\begin{aligned}
\int_X|V(x)|^p\,d\mu(x) &= \lim_{N\to+\infty}\int_X|V_N(x)|^p\,d\mu(x)\\
&\leq (\|f_0\|_p+1)^p.
\end{aligned}$$

Donc $|V|^p$ est μ-intégrable, donc $\mu(\{|V|^p=+\infty\})=0$, donc $\mu(\{|V|=+\infty\})=0$. Aussi V est finie μ-presque partout. On se donne un sous-ensemble A de X vérifiant $\mu(X\setminus A)=0$ tel que V soit fini sur A.

Puisque $\mathbb{K}$ est complet, pour tout $x\in A$, la suite $U_N(x)$ converge absolument, donc converge, vers $V(x)\in[0,+\infty[$.

On en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers une limite $f(x)\in\mathbb{K}$. On prolonge la fonction f sur X en posant $f(x)=0$ pour tout $x\in X\setminus A$.

Par ailleurs, μ-presque partout, on a $|f|^p\leq\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p=V^p$, donc $f\in L^p(\mu)$.

Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_p$.

La suite $(|f_n-f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers zéro, et on a pour μ-presque tout $x\in X$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)|^p &= \left|\sum_{k=0}^{n}u_k(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(x)\right|^p\\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|^p\\
&\leq V^p(x)
\end{aligned}$$

Et $V^p \in L^1(\mu)$. Donc par théorème de convergence dominée, $\|f_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a démontré que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^p, alors elle admet une sous-suite convergente dans L^p, donc elle converge dans L^p.

On traite maintenant le cas $p = +\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout p, $q \geq N$ on ait :

$$\|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'après la proposition 2, pour tout $(p, q) \in [\![N, +\infty[\![^2$, il existe un ensemble $\mathcal{N}_{p,q} \subset X$ μ-négligeable tel que pour $x \in X \setminus \mathcal{N}_{p,q}$, on ait $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

Posons $\mathcal{N} = \bigcup_{p,q\geq N} \mathcal{N}_{p,q}$. Alors $\mu(\mathcal{N}) \leq \sum_{p,q\geq N} \mu(\mathcal{N}_{p,q}) = 0$ donc $\mathcal{N}$ est μ-négligeable et pour tout $x \in X \setminus \mathcal{N}$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$, donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, qui est complet : elle converge vers une limite $f(x)$. Pour $x \in \mathcal{N}$, on pose $f(x) = 0$ (mais cela n'a pas d'importance).

Un passage à la limite quand $q \to +\infty$ donne alors

$$\forall x \in X \setminus \mathcal{N} \quad \forall p \geq N \quad |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $|f(x)| \leq \varepsilon + |f_N(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f_N(x)|$, donc f est bornée sur $X \setminus \mathcal{N}$.

On a alors :

$$\mu\left(\left\{|f| > \sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f(x)|\right\}\right) \leq \mu(\mathcal{N}) = 0,$$

donc par définition, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f(x)| < \infty$. Donc $f \in L^\infty(\mu)$.

Par ailleurs, $\sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq N$, donc on montre de même que $\|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$.

Ceci justifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc $L^\infty(\mu)$ est complet. $\square$