P. Maurer

ENS Rennes

Recasage : *201, 207, 208, 228.*

Référence : Document trouvé sur internet (auteur manquant)

Représentation des fonctions lipschitziennes

Dans tout ce qui suit, on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue. On notera, pour $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mathbb{R}) := L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et dx pour λ.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Alors f est lipschitzienne si et seulement si il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\, dt.$$

Démonstration.

Le sens $\boxed{\Longleftarrow}$ est immédiat. On va démontrer $\boxed{\Longrightarrow}$. On suppose que f est k-lipschitzienne, et on définit la forme linéaire T suivante sur l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T, \varphi \rangle := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

- **Etape 1 : montrons que T est une forme linéaire continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.**

  Pour cela, on va commencer par démontrer que $\langle T, \varphi \rangle = -\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\, dx$.

  D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)\, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x)\, \varphi'(x)$. D'autre part, en notant M un réel positif tel que $|\varphi(x)| = 0$ pour $|x| \geq M$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h \in]-1, 1[\quad \left| f(x)\, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| &= \left| f(x)\, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\, \mathbf{1}_{[-M-1, M+1]}(x) \right| \\ &\leq |f(x)|\, \frac{\|\varphi'\|_\infty |h|}{|h|}\, \mathbf{1}_{[-M-1, M+1]}(x) \\ &= |f(x)|\, \|\varphi'\|_\infty\, \mathbf{1}_{[-M-1, M+1]}(x) \end{aligned}$$

  La fonction $x \mapsto |f(x)|\, \|\varphi'\|_\infty\, \mathbf{1}_{[-M-1, M+1]}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure.

  Via la linéarité de l'intégrale et le changement de variable $u = x + h$ (qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{\varphi(x+h)}{h}\, dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{\varphi(x)}{h}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u-h)\, \frac{\varphi(u)}{h}\, du - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{\varphi(x)}{h}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}\, \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \left| -\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \varphi(x)\, dx \right| \\
&\leq \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} k\varphi(x)\, dx \\
&= k\, \|\varphi\|_1.
\end{aligned}
$$

Donc T est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}),\mathbb{R})} \leq k$.

- **Etape 2 : on construit la fonction g grâce au théorème de représentation de Riesz.**

  On a montré que T était linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème de prolongement des applications linéaires continues affirme que T admet un unique prolongement à $L^1(\mathbb{R})$, qui est encore continu. On notera encore T ce prolongement. Il vérifie toujours $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}),\mathbb{R})} \leq k$.

  On se donne un entier $n \in \mathbb{N}$. $L^2([-n,n])$ s'injecte continûment dans $L^1([-n,n])$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Soit $\varphi \in L^2([-n,n])$, on a en effet :

$$
\|\varphi\|_1 = \int_{-n}^{n} |\varphi(t)|\, dt \leq \sqrt{\int_{-n}^{n} |\varphi(t)|^2\, dt} \times \sqrt{\int_{-n}^{n} |1|^2\, dt} = \|\varphi\|_2 \cdot \sqrt{2n}.
$$

  Par ailleurs, en posant $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad x \in [-n,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a $\tilde{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$.

  On peut alors définir l'application T_n de la manière suivante :

$$
\forall \varphi \in L^2([-n,n]) \quad \langle T_n, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle.
$$

  Alors T_n est continue pour la norme $\|\cdot\|_2$ d'après ce qui précède, donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique application $g_n \in L^2([-n,n])$ vérifiant

$$
\forall \varphi \in L^2([-n,n]) \qquad \langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-n}^{n} g_n(x)\, \varphi(x)\, dx.
$$

  Pour $m \geq n$, on a $g_{m|[-n,n]} = g_n$ par unicité. Ainsi, en posant $g = \liminf_{n \to +\infty} g_n$, la fonction g vérifie $g(x) = g_n(x)$ pour tout $x \in [-n,n]$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Etape 3 : montrons que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.**

  On va en fait montrer que $\lambda(\{|g| > k\}) = 0$, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\lambda(\{|g| > k\}) > 0$. On a l'union dénombrable

$$
\{|g| > k\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|g| > k\} \cap [-n,n],
$$

  donc en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{|g| > k\} \cap [-n,n]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(A_{n_0}) > 0$.

Posons $\varphi := \mathrm{sgn}(g_{n_0})\, \mathbf{1}_{A_{n_0}}$. Alors $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \left| \int_{-n_0}^{n_0} g_{n_0}\, \varphi\, d\lambda \right| \\
&= \int_{A_{n_0}} |g_{n_0}|\, d\lambda \\
&= \int_{A_{n_0}} |g|\, d\lambda \\
&> \int_{A_{n_0}} k\, d\lambda \\
&= k\mu(A_{n_0}) \\
&> k\, \|\varphi\|_1.
\end{aligned}$$

Ceci contredit que $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}),R)} \leq k$. Ainsi, $\mu(\{|g| > k\}) = 0$ donc $\|g\|_\infty \leq k$ par définition.

- **Etape 4 : on montre que $f(x) - f(y) = \int_x^y g(t)\, dt$.**

  Posons $G(x) := \int_0^x g(t)\, dt$. L'objectif est de montrer que l'on a $G = f + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Pour cela, on va utiliser deux résultats de la théorie des distributions.

  D'une part, on va montrer, au sens des distributions, que $G' = f'$. Ceci impliquera que la distribution $G - f$ est constante égale à un certain $c \in \mathbb{R}$, et puisque $G - f - c \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, que $G - f - c = 0$, λ-presque partout. Finalement, comme $G - f - c$ est continue, on en déduira que $G - f = c$ sur $\mathbb{R}$.

  Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle G', \varphi\rangle &= -\langle G, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x g(t)\, dt \right) \varphi'(x)\, dx.
\end{aligned}$$

  Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\varphi(x)| = 0$ pour $|x| \geq M$. On peut écrire

$$\langle G', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\, dt \right) \varphi'(x)\, \mathbf{1}_{[-M,M]}(x)\, dx,$$

  avec la convention $\mathbf{1}_{[0,x]} = -\mathbf{1}_{[x,0]}$ lorsque $x \leq 0$ [1]

  Par ailleurs, on a

$$|g(t)\, \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\, \varphi'(x) \mathbf{1}_{[-M,M]}(x)| \leq \|g\|_\infty \cdot \|\varphi'\|_\infty\, \mathbf{1}_{[-M,M]}(x)\, |\mathbf{1}_{[0,x]}(t)| \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

  Le théorème de Fubini-Lebesgue assure alors que

$$\begin{aligned}
\langle G', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\, \mathbf{1}_{[-M,M]}(x)\, \varphi'(x)\, dx \right) g(t)\, dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^{+\infty} \varphi'(x)\, dx \right) g(t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t)\, dt \\
&= \langle T, \varphi\rangle \\
&= \langle f', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

1. Ceci nous permet d'éviter de séparer l'intégrale en deux parties, ce qui marcherait aussi en appliquant deux fois le théorème de Fubini .