P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *213, 234, 261.*

Référence : Brianes & Pages, Théorie de l'intégration.

Théorème de Radon Nikodym

Théorème 1. (de représentation de Riesz).

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace de* Hilbert*. Alors l'application* $\mathcal{L}$ *définie par*

$$\mathcal{L}\colon\left\{\begin{array}{lll} H & \rightarrow & H' \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a = (x \mapsto \langle x, a\rangle) \end{array}\right.$$

est une bijection antilinéaire isométrique.

Théorème 2. (de Radon-Nikodym)

Soit $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* μ, ν *deux mesures positives* σ*-finies sur* $(X, \mathcal{A})$*. Il y a équivalence entre :*

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$ *(on note* $\nu \ll \mu$*).*
2. $\exists f\colon (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ μ*-intégrable telle que* $\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = \int_A f d\mu$*.*

En outre, la fonction f *est unique (à une égalité* μ*-presque partout près).*

On note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ *et on dit que* f *est la dérivée de* Radon-Nikodym*, ou la densité de* ν *par rapport à* μ*.*

Démonstration.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Le sens indirect est immédiat, puisque pour $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X \mathbf{1}_A \cdot f, \text{ et } \mathbf{1}_A \text{ est nulle } \mu\text{-presque partout.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour le sens direct, on commence par le cas où σ et μ sont des mesures finies. En particulier, on a dans ce cas $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$.

- **Etape 1** : cas où $\nu \leq \mu$.

  On suppose dans cette étape que $\nu \leq \mu$. Alors pour toute fonction g mesurable positive, on a $\int g d\nu \leq \int g d\mu$: en particulier, $L^2(\mu) \subset L^2(\nu)$, donc on peut considérer l'application linéaire

$$\Phi\colon\left\{\begin{array}{lll} L^2(\mu) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_X f d\nu \end{array}\right..$$

L'application Φ est linéaire et continue. En effet, pour $g \in L^2(\mu)$, on a

$$\begin{aligned} |\Phi(g)| &= \left|\int_X g d\nu\right| \\ &\leq \int_X |g| \, d\nu \\ &\leq \|g\|_{L^2(\nu)} \cdot \sqrt{\nu(X)} \\ &\leq \|g\|_{L^2(\mu)} \cdot \sqrt{\nu(X)}, \end{aligned}$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la seconde inégalité.

Le théorème de représentation de Riesz assure alors l'existence d'une fonction $f \in L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$ tel que

$$\forall g \in L^2(\mu) \quad \Phi(g) = \langle f, g\rangle_{L^2(\mu)}$$

Autrement dit, pour tout $g \in L^2(\mu)$ on a

$$\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu.$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, comme μ est finie, $\mathbf{1}_A \in L^2(\mu)$ donc on a en particulier

$$\nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, d\nu = \int_X \mathbf{1}_A \cdot f d\mu = \int_A f d\mu.$$

Montrons maintenant que f est positive. On suppose par l'absurde que $\mu(\{f < 0\}) > 0$. Alors il existe un entier n_0 tel que $\mu\left(\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}\right) > 0$. On en déduit que :

$$\nu\left(\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}\right) = \int_{\left\{f \leq -\frac{1}{n_0}\right\}} f d\mu \leq -\frac{\mu(X)}{n_0} < 0.$$

Ceci contredit que la mesure ν est positive. Ainsi, on a $\mu(\{f < 0\}) = 0$. De la même manière, on peut montrer que $\mu(\{f > 1\}) = 0$, et on en déduit en fait que f est μ-presque partout à valeurs dans $[0, 1]$.

- **Etape 2** : cas général.

  On applique l'étape 1 aux mesures finies ν et $\mu + \nu$. Il existe $f \in L^1(\mu + \nu)$ avec $f \in [0, 1]$ $(\mu + \nu)$-presque partout, tel que

  $$\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = \int_A f d(\mu + \nu).$$

  On a alors :

  $$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A (1 - f) \, d\nu = \int_A f d\mu.$$

  Notons $N := \{f = 1\}$. Alors $\mu(N) = \int_N f d\mu = \int_N (1 - f) \, d\nu = 0$, donc comme $\nu \ll \mu$, on en déduit $\nu(N) = 0$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on peut décomposer $A = (A \cap N) \sqcup (A \cap N^c)$, et on obtient

  $$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap N) + \nu(A \cap N^c) \\ &= \nu(A \cap N^c) \\ &= \int_A \mathbf{1}_{N^c} \frac{1}{1 - f} (1 - f) \, d\nu \\ &= \int_A \mathbf{1}_{N^c} \frac{f}{1 - f} \, d\mu, \end{aligned}$$

avec $\varphi := \mathbf{1}_{N^c}\dfrac{f}{1-f} \geq 0$ μ-presque partout car $1-f\geq 0$ $(\mu+\nu)$-presque partout. Par ailleurs, on a $\displaystyle\int_X \varphi d\mu = \nu(X) < \infty$ donc $\varphi \in L^1(\mu)$: ainsi φ vérifie la propriété *2.* du théorème.

- **Etape 3 :** unicité.

  On suppose que f et g vérifient *2.* On a

$$\begin{aligned}\nu(\{f>g\}) &= \int_{\{f>g\}} f d\mu \\ &= \int_{\{f>g\}} g d\mu\end{aligned}$$

  Ainsi, $\int_X \mathbf{1}_{\{f>g\}}(f-g)d\mu = 0$: comme $\mathbf{1}_{\{f>g\}}(f-g)$ est positive, elle est nulle μ-presque partout, donc $\mu(\{f>g\})=0$. On obtient de même que $\mu(\{g>f\})=0$, donc $f=g$ μ-presque partout.

On traite à présent le cas où ν et μ sont σ-finies, en se ramenant au cas fini. On considère deux partitions $(F_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$ de X constituées d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(F_n) < \infty \quad \text{et} \quad \nu(G_n) < \infty.$$

On pose alors, pour $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$, $E_{k,\ell} := F_k \cap G_\ell$. Alors $\displaystyle\bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} E_{k,\ell}$ contient $F_0 \cap \displaystyle\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} G_\ell = X$, donc $(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ forme une partition de X, et on a $\nu(E_{k,\ell}) \leq \nu(G_\ell) < \infty$ et $\mu(E_{k,\ell}) \leq \mu(F_k) < \infty$.

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on peut supposer que ces ensembles sont indexés par $\mathbb{N}$: on les note dorénavant $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mu_n = \mu(\cdot \cap E_n)$ et $\nu_n = \nu(\cdot\cap E_n)$.

Les mesures μ_n et ν_n sont finies, donc d'après ce qui précède, il existe $f \in L^1(\mu_n)$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A\cap E_n) = \int_A f d\mu_n = \int_A f\, \mathbf{1}_{E_n}\, d\mu.$$

On définit alors $f := \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathbf{1}_{E_n}$. Alors d'après le théorème de convergence monotone, il vient

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A \sum_{n\geq 0} f_n\, \mathbf{1}_{E_n}\, d\mu \\ &= \int_X \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_A\, f_n\, d\mu_n \\ &= \sum_{n\geq 0}\int_X \mathbf{1}_A\, f_n\, d\mu_n \\ &= \sum_{n\geq 0} \nu(A\cap E_n) \\ &= \nu(A).\end{aligned}$$

L'unicité se prouve alors comme dans le cas où σ et μ sont finies. $\square$

Application 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire réelle sur Ω. On dit que la loi P_X de X admet une densité par rapport à la mesure de LEBESGUE λ sur $\mathbb{R}$ si on a $P_X \ll \lambda$.

Dans ce cas, la fonction de répartition F_X de X s'écrit

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, d\lambda(x),$$

où $f_X = \dfrac{dP_X}{d\lambda}$ est la dérivée de RADON-NIKODYM de P_X par rapport à λ.

Remarque 4. Le résultat est faux si on ne suppose plus que μ est σ-finie.

Considérons l'espace mesurable $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ muni respectivement de la mesure de comptage m et de la mesure de LEBESGUE λ.

Pour $A \in \mathcal{B}([0,1])$, si $m(A) = 0$, c'est que $A = \varnothing$, et on a donc en particulier $\lambda(A) = 0$. Ainsi, on a bien $\lambda \ll m$. Supposons qu'il existe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \lambda(A) = \int_A f dm.$$

Comme $\lambda([0,1]) = 1$, f est m-intégrable. L'inégalité de MARKOV assure alors que $D := \{f > 0\}$ est dénombrable : en effet, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$m\left(\left\{x \in [0,1] \,:\, f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_{[0,1]} f dm < \infty.$$

Donc ${}^cD$ est un borélien de mesure de LEBESGUE $\lambda({}^cD) = 1$. Par ailleurs, on a :

$$\int_{{}^cD} f dm = \int_{[0,1]} f\, \mathbf{1}_{\{f=0\}}\, dm = 0.$$

Donc $\lambda({}^cD) = 0$: on obtient une contradiction.