P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *213, 222, 228*.

Référence : Polycopié de J.Y. Chemin, M1 Paris VI « Bases d'analyse fonctionnelle ». A ce jour, je n'ai pas trouvé de livre dans lequel le sujet est abordé de façon assez élémentaire pour être présenté à l'oral.

Problème de Dirichlet sur $H_0^1(\Omega)$

On rappelle le théorème suivant, qui peut être vu comme un cas particulier du théorème de Lax-Milgram :

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert réel, et ℓ une forme linéaire continue sur H.*

Alors la fonction $F\colon \left\{ \begin{array}{lcl} H & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \langle \ell, u\rangle \end{array} \right.$ *est minorée, et il existe un unique $v \in H$ tel que*

$$F(v) = \inf_{u \in H} F(u) \quad \textit{et} \quad \forall h \in H \quad \langle v, h\rangle_H = \langle \ell, h\rangle.$$

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et **à support dans un compact** de $\overline{\Omega}$.

Pour $x \in \Omega$ et une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, on note

$$\nabla u(x) = \operatorname{grad} u(x) = (\partial_1 u(x), \ldots, \partial_d u(x)) \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, on note

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{j=1}^d |\partial_j u(x)|^2 \quad \text{et} \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 := \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \sum_{j=1}^d \int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 \, dx.$$

On commence par introduire les notions de « quasi-dérivée » et l'espace $H_0^1(\Omega)$. Ces notions sont à mettre dans le plan et il est bon d'avoir une idée des démonstrations (qui ne sont pas trop difficiles pour la plupart), mais ce serait bien trop long de tout démontrer dans le développement.

1 Quasi-dérivées et espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 2. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. On dit que u admet une quasi-dérivée partielle dans la direction j si il existe $C \geq 0$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \qquad \left| \int_\Omega u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx \right| \leq C \, \|\varphi\|_{L^2}.$$

Proposition 3.

1. *Si $u \in L^2(\Omega)$ admet une quasi dérivée-partielle dans la direction j, alors il existe une unique fonction $u^{(j)} \in L^2(\Omega)$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega u(x) \, \partial_j \varphi(x) \, dx \; = \; -\int_\Omega u^{(j)}(x) \, \varphi(x) \, dx.$$

2. Si de plus $u\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, alors $u^{(j)}=\partial_j u$.

Démonstration.

1. L'application $\varphi \overset{\ell}{\mapsto} \int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx$ est linéaire et continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

   Comme $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, ℓ se prolonge en une application $\hat{\ell}$ continue pour la norme L^2, et $(L^2, \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace de Hilbert. Il suffit alors d'appliquer le théorème de représentation de Riesz.

   On appelle alors quasi dérivée partielle de u dans la direction j l'applucation $u^{(j)}$ ainsi obtenue.

2. Si $u\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, une intégration par parties donne

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)\quad \int_\Omega u(x)\,\partial_j\varphi(x)\,dx \;=\; -\int_\Omega \partial_j u(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

   On a donc

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)\quad \int_\Omega [\partial_j u(x)-u^{(j)}(x)]\,\varphi(x)\,dx \;=\; 0.$$

   Par densité de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, cette égalité reste vraie pour $\varphi\in L^2(\Omega)$. On en déduit que $\|\partial_j u-u^{(j)}\|_{L^2}^2=0$ donc $u^{(j)}=\partial_j u$.

Dorénavent, on notera donc $\partial_j u$ la quasi-dérivée partielle de u dans la direction j. □

Définition 4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions $u\in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{L^2}=0$, et où les suites $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans L^2.*

Proposition 5. *Si $u\in H_0^1(\Omega)$, alors u admet des quasi dérivées partielles dans toutes les directions.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec $\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{L^2}=0$, et où les suites $(\partial_j\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans L^2. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe une fonction $u^{(j)}$ de $L^2(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\|\partial_j u_n-u^{(j)}\|_{L^2}=0$. En particulier, on a $\lim_{n\to+\infty}\langle\partial_j u_n,\varphi\rangle=\langle u^{(j)},\varphi\rangle$ pour tout $\varphi\in L^2(\Omega)$[1]. Via une intégration par parties, on en déduit que

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u(x)\,\partial_j\varphi(x)\,dx &= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\partial_j\varphi(x)\,dx\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \partial_j u_n(x)\,\varphi(x)\,dx\\
&= \int_\Omega u^{(j)}(x)\,\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, u admet une quasi-dérivée partielle dans la direction j et on a $\partial^j u=u^{(j)}$. □

1. En effet, la convergence en norme L^2 implique la convergence faible. Ce résultat se montre de façon élémentaire avec une inégalité triangulaire puis en utilisant Cauchy-Schwarz.

Proposition 6. *Muni de la norme définie par* $N(u) := \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$*, l'espace* $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration.

Il est facile de montrer que N est la norme associée au produit scalaire suivant sur H_0^1 :

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \partial_j u(x)\, \partial_j v(x)\, dx.$$

Considérons une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N d'éléments de $H_0^1(\Omega)$, et $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des quasi-dérivées d'ordre j. Remarquons que par définition de la norme N, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors de Cauchy pour la norme L^2.

Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions u et $(u^{(j)})_{1\leq j\leq d}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\partial_j u_n - u^{(j)}\|_{L^2} = 0. \quad (\star)$$

Par définition de $H_0^1(\Omega)$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une fonction $v_n \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - v_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|\partial_j u_n - \partial_j v_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - u\|_{L^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\partial v_n - u^{(j)}\| = 0.$$

Donc $u\in H_0^1(\Omega)$ et $u^{(j)} = \partial_j u$. L'inégalité de Minkowski assure que

$$\begin{array}{rcl} N(u_n - u) & \leq & \|u_n - u\|_{L^2} + \|\partial_j u_n - \partial_j u\|_{L^2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\to} & 0 \text{ d'après } (\star). \end{array}$$

□

2 Inégalité de Poincaré et résolution du problème de Dirichlet

Le développement en lui-même commence ici.

Soit $f\in L^2(\Omega)$. On considère la fonctionnelle :

$$F : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{C}_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx \end{array} \right. .$$

L'objectif est de trouver un minimum pour F, c'est-à-dire s'il existe une fonction $u\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que

$$F(u) = \inf_{v\in C_0^1(\Omega)} F(v).$$

Proposition 7. *(Inégalité de Poincaré)*

Il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2} \;\leq\; C(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. On note encore u l'application définie sur $\mathbb{R}^d$ qui vaut u sur Ω et 0 sur $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Alors u vérifie

$$\forall (x_1, x') \in \Omega \;\; u(x_1, x') \;=\; \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(y_1, x')\, dy_1.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une constante $\delta(\Omega) \geq 0$ telle que

$$\forall (x_1, x') \in \Omega \quad |u(x_1, x')|^2 \;\leq\; \delta(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u(y_1, x')|^2\, dy_1.$$

Et donc en intégrant sur Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x_1, x')|^2\, dx_1\, dx' \;&\leq\; \delta(\Omega) \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u(y_1, x')|^2\, dy_1\, dx_1\, dx' \\ &\leq\; C(\Omega) \int_\Omega |\partial_1 u(y_1, x')|^2\, dy_1\, dx'. \\ &\leq\; C(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 8. *La norme définie sur $H_0^1(\Omega)$ par $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$ est équivalente à N. En particulier, l'espace $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration.

Comme $\|u\|_{H_0^1} \leq N(u)$, il suffit de montrer qu'il existe $C \geq 0$ tel que $N(u) \leq C \cdot \|u\|_{H_0^1}$. Par ailleurs, on a $N(u)^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$ donc il suffit de trouver C tel que $\|u\|_{L^2} \leq C\; \|\nabla u\|_{L^2}$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\partial_j u_n - \partial_j u\|_{L^2} = 0$.

Alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Poincaré assure que

$$\|u_n\|_{L^2} \;\leq\; C(\Omega)\, \|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ (la norme étant continue), on obtient

$$\|u\|_{L^2} \;\leq\; C(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on en déduit le résultat. □

Théorème 9. *(Résolution du problème de Dirichlet)*

- *La fonctionnelle F est minorée sur $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Elle se prolonge continûment à l'espace $H_0^1(\Omega)$ tout entier et on a*

$$\inf_{v\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)} F(v) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} F(v).$$

- *Cet infimum est atteint en un unique point u sur $H_0^1(\Omega)$, qui vérifie*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{L^2}.$$

Démonstration.

Etape 1 : Montrons que F est minorée sur $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$.

D'après l'inégalité de Poincaré, on a, pour $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\,\|u\|_{L^2} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C(\Omega)\|f\|_{L^2}\,\|\nabla u\|_{L^2} \\
&= \frac{1}{2}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C(\Omega)\,\|f\|_{L^2}^2)^2 - C(\Omega)^2\,\|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que F est minorée sur $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$.

Etape 2 : Montrons que F se prolonge continûment à l'espace $H_0^1(\Omega)$.

On sait que $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, donc a fortiori dans $H_0^1(\Omega)$. On va montrer que F est uniformément continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_{H_0^1}$.

Soit $u_0 \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Donnons nous $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ tel que $\|\nabla u - \nabla u_0\|_{L^2} \leq \delta$ avec $\delta > 0$ à déterminer. On a alors

$$\begin{aligned}
|F(u_0) - F(u)| &= \left|\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_\Omega f(x) u(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\, u_0(x)\, dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}(\|\nabla u_0\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})(\|\nabla u_0\|_{L^2} - \|\nabla u\|_{L^2}) + \|f\|_{L^2}\,\|u - u_0\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré assure que $\|u - u_0\|_{L^2} \leq C(\Omega)\,\|\nabla u_0 - \nabla u\|_{L^2}$. Par ailleurs, par (la seconde) inégalité triangulaire, on a

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} - \|\nabla u\|_{L^2} \leq \|\nabla u_0 - \nabla u\|_{L^2},$$

et de plus, $\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2} \leq \|\nabla u - \nabla u_0\|_{L^2} + 2\,\|\nabla u_0\|_{L^2} \leq \|\nabla u - \nabla u_0\|_{L^2} + \sup_{v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2}$. [2]

On en déduit que

$$|F(u_0) - F(u)| \leq (\delta + 2\,\|\nabla u_0\|_{L^2})\,\delta + \|f\|_{L^2}\,\delta.$$

Aussi, en choisissant $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que $\left(\delta + 2 \sup_{v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2}\right)\delta + \|f\|_{L^2}\,\delta \leq \varepsilon$, on en déduit la continuité de F entre les espaces $(\mathcal{C}_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Notons que δ est choisi indépendamment de u_0, donc F est en fait uniformément continue.

Le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense permet alors de prolonger F en une fonction uniformément continue sur $H_0^1(\Omega)$.

2. Rappelons que les fonctions de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ sont toutes à support inclu dans $\overline{\Omega}$, donc il en va de même de leurs dérivées partielles en toute direction $j \in [\![1, d]\!]$. Ceci justifie que $\sup_{v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2}$ est fini.

Etape 3 : Montrons que $\inf\limits_{v\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)} F(v) = \inf\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} F(v)$.

Notons $m = \inf\limits_{v\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)}$. On a $\mathcal{C}_0^1(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, donc $m \geq \inf\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} F(v)$.

Soit $u\in H_0^1(\Omega)$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ telle que $\|u_n - u\|_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\|\partial_j u_n - \partial_j u\|_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par définition, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $F(u_n)\geq m$, donc

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} - \langle u_n, f\rangle_{L^2} \;\;\geq\;\; m$$

Comme la norme est continue et que la convergence L^2 implique la convergence faible, on peut passer à la limite quand $n\to+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus. On en déduit que $\|\nabla u\|_{L^2} - \langle u, f\rangle_{L^2} \geq m$, donc $F(u)\geq m$. Ceci étant vrai pour tout $u\in H_0^1(\Omega)$, il vient $\inf\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} F(v)\geq m$.

Etape 4 : Résolution du problème.

Comme $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1})$ est un espace de Hilbert, le théorème 1 rappelé en préliminaires permet d'affirmer que m est atteint en un unique point u sur $H_0^1(\Omega)$, qui vérifie

$$\forall v\in H_0^1(\Omega) \qquad \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{L^2}. \qquad \square$$

Remarque 10. La solution u trouvée vérifie donc en particulier, pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{C}_0^2(\Omega)$:

$$\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_j u(x)\, \partial_j \varphi(x)\, dx \;=\; \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$-\int_\Omega u(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx \;=\; \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Ceci montre que u est solution du problème « $\Delta u = f$ », où l'égalité est vue au sens des distributions.