Pré-rentrée ECG 2ème année

Mathématiques - Sujets de TD

Analyse

1 Fonctions usuelles, suites numériques

Exercice 1 - *Pour réviser (début du sujet HEC 2023)*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) = +\infty$.

3. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

4. Montrer que la fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Soit $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = 2\arcsin(\sqrt{x})$.

(a). Montrer que G est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, de dérivée g donnée par

$$\forall x \in]0,1[\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

(b). Etudier la fonction G et tracer son graphe.

Exercice 2 - *Deux suites incontournables*

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $a, b > 0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ convergent vers une même limite $M(a,b) \geq 0$.

2. Etudier la limite de la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{\alpha}{u_n}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

indication : On pourra commencer par étudier le signe de $u_{n+1}^2 - \alpha$.

Exercice 3 - *Edhec 2018*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n par $f_n(x) = 1 - x - x^n$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.

2. **(a).** Vérifier que $u_n \in]0,1[$.

(b). En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

(c). Conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.

(d). Montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a). Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n v_n$.

(b). Etablir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c). Montrer enfin que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

2 Intégration

Exercice 1 - *Pour réviser*

A) *Calcul d'intégrales sur un segment*

Soit $t \in [0,1]$. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx.$ **2.** $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x + x(\ln(x))^2}\, dx.$ **3.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}\, dx.$

B) *Etude d'intégrales impropres*

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt.$ **2.** $\displaystyle\int_1^2 \ln(\ln(t))\, dt.$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$

C) *Changement de variable*

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta.$

1. Donner l'ensemble de définition de φ. On le notera I.

2. Démontrer que si $u = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, alors $\sin(\theta) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

3. En déduire que

$$\forall x \in I \quad \varphi(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Exercice 2 - *Une étude de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t x^2}}{1+t^3}\, dt.$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est paire.

3. **(a).** Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $|e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a-b|$.

(b). En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|F(x) - F(y)| \leqslant C\,|x^2 - y^2|$ avec $C > 0$.

(c). Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - *Em Lyon 2004*

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, et tout entier naturel k, l'application $t \mapsto t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0,+\infty[$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge.

On note, pour tout entier naturel k, B_k: $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x strictement positif, par $B_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

2. (a). Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |e^u - 1 - u| \;\leq\; \frac{u^2}{2}\,e^{|u|}.$$

(b). En déduire que pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| < \frac{x}{2}$, on a :

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \;\leq\; \frac{|h|}{2}\,B_{k+2}\!\left(\frac{x}{2}\right).$$

(c). Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad B_k'(x) \;=\; -B_{k+1}(x).$$

(d). En déduire que B_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ on a

$$B_0''(x) + B_0(x) \;=\; \frac{1}{x}.$$

3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leq -B_0'(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

En déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ quand $x \to +\infty$.

4. (a). Montrer que pour $x > 0$, on a

$$e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t^2} \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

(b). Justifier, pour tout réel $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, que

$$\int_0^y du \;=\; \int_0^{\tan(y)} \frac{dt}{1+t^2}.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

(c). En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3 Séries numériques

Exercice 1 - *Pour réviser*

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{4}{3}} + \cos(n)}$. **2.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. **3.** $u_n = \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$.

Exercice 2 - *Eml 2016*

On s'intéresse à la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

(a). Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

(b). En déduire : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0 \ \ |u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

(c). Justifier alors que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

(d). Justifier que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$.

(e). En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

Exercice 3 - *Escp 2010*

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $l \in \mathbb{R}$.

(a). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k - l \right| \leqslant \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0-1} (a_k - l) \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

(b). En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

(a). Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

(b). Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha} \right)$ existe et soit un réel non nul.

(c). Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 4 - *Oral Escp 2018*

Soit A et λ deux réels strictement positifs. Soit $I = [0, A]$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n(t))_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(t) \; = \; \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{n\lambda t}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ est convergente et calculer sa somme $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.

2. On pose $R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)$. Soit f une fonction continue sur I à valeurs réelles.

(a). Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, on ait :

$$|f(t)\, R_n(t)| \; \leq \; \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!}.$$

(b). En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)\, dt \; = \; \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))\, f(t)\, dt.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (1 - \exp(-e^{\lambda t}))$.

4. En découpant l'intervalle $[0, A]$ en deux intervalles $[0, \delta]$ et $[\delta, A]$ avec $\delta > 0$ bien choisi, montrer que l'on a :

$$\int_0^A f(t)\, dt \; = \; \lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)\, dt.$$

***

Algèbre linéaire

1 Applications linéaires & Polynômes

Exercice 1 - *Pour réviser*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Démontrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ constitue une famille libre de E.

2. Déterminer l'image et le noyau des applications linéaires suivantes :

(a). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, 4x - 6y)$.

(b). $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$.

Exercice 2 - *Eml 2015*

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$, et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.

2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.

3. En déduire une base de E et la dimension de E.

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par

$$\Delta(Q) \quad = \quad Q(X+1) - Q(X).$$

4. (a). Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b). Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.

(c). Déterminer le noyau et l'image de Δ.

(d). Etablir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$.

5. (a). Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.

(b). Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 3 - *Edhec 2016*

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

(a). Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\,\mathrm{Id} - f)$.

(b). En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.

(c). Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.

(a). Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$.

(b). En déduire que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, de degré égal à $p \geq 2$, vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

(a). Montrer qu'il existe p réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$ tels que $P = a_1 X + \cdots + a_p X^p$.

(b). En déduire que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

(c). En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?

Exercice 4 - *HEC 2004*

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, et pour $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

On fixe $q \in E$ et on pose :

$$F(q) = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0,1] \quad f''(t) = q(t) f(t)\}.$$

Il est clair que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Pour $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par $\Phi(f)(t) = \displaystyle\int_0^t (t-u)\, q(u)\, f(u)\, du$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$, que $\Phi(f) \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et calculer $\Phi(f)'$ et $\Phi(f)''$ pour $f \in E$.

2. Soit $f \in E$. On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

(a). Démontrer que $|f_n(t)| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(b). Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro.

3. On définit l'application Δ: $\left\{ \begin{array}{l} F(q) \to \mathbb{R}^2 \\ f \mapsto (f(0), f'(0)) \end{array} \right.$.

(a). Montrer que Δ est linéaire et injective.

(b). Que peut-on en déduire quant à la dimension de $F(q)$?

2 Matrices

Exercice 1 - *Pour réviser*

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - *Exercice d'oral sans préparation*

Soit $n \geq 2$, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B est inversible. Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 3 - *Eml 2013*

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\operatorname{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne constituée des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colone de A.

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est linéaire.

2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

4. Soit $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux matrices colonnes non nulles.

(a). Justifier que $U\,{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

(b). Exprimer $\mathrm{Tr}(U\,{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

(c). Quel est le rang de $U\,{}^tV$?

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a). Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$C_j(A) \;=\; \alpha_j C_{j_0}(A).$$

(b). En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$A \;=\; U\,{}^tV.$$

6. Enoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

7. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 alors $A^2 = \mathrm{Tr}(A)\,A$.

Exercice 4 - *Une formule de dénombrement*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et m un entier relatif non nul. On considère $f_m\colon E \to E$ définie par $f_m(P) = P(X+m)$.

1. Montrer que f_m est un endomorphisme de E.

2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_m)$.

3. **(a).** On note $\varphi = f_1$ et $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Vérifier que $f_m = \varphi^m$.

(b). En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $A(i,j) = T^m(i,j) = m^{j-i}\,T(i,j)$.

4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

5. Montrer que pour tout $(p,q) \in [\![0,n]\!]^2$ tels que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$

***

Probabilités

Exercice 1 - *Edhec 2014*

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ en posant, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) \quad = \quad \int_0^1 \max\left(X(\omega), t\right) dt.$$

1. Vérifier que si X suit une loi géométrique, alors on a $Y = X$.

2. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

(a). Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

(b). Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

(c). Compléter la déclaration de la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y :

```
import numpy.random as rd
def Y():
    u = rd.random()
    if(···):
        ...
    else:
        y=...
return(y)
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a). Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y.

(b). En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 2 - *HEC 2001, Voie E*

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. On pose pour tout $n \geq 1$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. On pose $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

1. Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que $\omega \in B$ si et seulement si $\omega \in A_k$ pour une infinité de valeurs de k.

2. Montrer que

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

3. Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 3 - *HEC 2016*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\,\mathbb{P}(X > n).$$

2. En déduire que si X admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3. Réciproquement, montrer que si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge, alors X admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 4 - *Majorations de la fonction de survie*

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

2. (a). Soit $x \geq 0$, $a > 0$ et Z une variable aléatoire discrète d'espérance nulle et de variance σ^2. Montrer que $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$. On pourra poser pour cela $Y = (Z+x)^2$.

(b). En déduire que $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

(c). En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

***

Problème − Hec 2017 partie 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$B_{n,k}(X) \;=\; \binom{n}{k} X^k\,(1-X)^{n-k}.$$

On pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $A_k = X^k$ et on note $C_n = (A_0, \dots, A_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $(T_n(P))(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 2$.

(a). Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base C_2.

(b). En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c). Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$ et déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base C_2.

2. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.

(a). Montrer que la famille $(B_{n,0}, \dots, B_{n,n})$ est libre, en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b). Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c). Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.

(d). Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k. Pour établir ce résultat, on pourra utiliser sans la démontrer la propriété suivante :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad (T_n(A_{k+1}))(X) \;=\; \frac{1}{n} X(1-X)(T_n(A_k))'(X) + X\,(T_n(A_k))(X).$$

(e). Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note α_k le coefficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et de n.

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [0, 1]$, $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z)$.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $z \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace, et suivant la loi binomiale de paramètre n et z. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{Z_n} = \dfrac{Z_n}{n}$.

(a). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) = 0$.

(b). Justifier l'existence de $M = \displaystyle\max_{\zeta \in [0,1]} |f(\zeta)|$.

(c). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement $U_n = \{|f(\overline{Z_n}) - f(z)| > \varepsilon\}$. On note $\mathbf{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'évènement U_n et $\overline{U_n}$ l'évènement contraire de U_n. Etablir l'inégalité

$$|f(\overline{Z_n}) - f(z)| \;\le\; 2M \times \mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbf{1}_{\overline{U_n}}.$$

(d). Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\overline{Z_n})] = f(z)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$.

***