P. Maurer

ENS Rennes

Référence : Testard, Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite.

Recasages : *181, 201, 203.*

Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

La démonstration du théorème principal de ce développement nécessite deux résultats, qui seront admis. On commence par les rappeler.

Théorème 1. *(d'Ascoli)*

Soit (K,d) un espace métrique compact, et (E,d') un espace métrique. Une partie A de $C(K,E)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. *A est équicontinue, i.e*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in K \quad \forall a \in A \quad d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow d'(a(x), a(y)) \leq \varepsilon.$$

2. *L'ensemble $\{a(x) : a \in A\}$ est relativement compact.*

Remarque 2. Dans le théorème d'Ascoli, on peut remplacer les conditions « relativement compact » par compact.

En fait, on utilise seulement le sens direct dans ce développement, qui est le plus simple à prouver.

Théorème 3. *(de Carathéodory)*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, d'espace vectoriel associé E et $A \subset \mathcal{E}$, avec $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Tout élément de l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$ de A s'écrit comme combinaison convexe de $N+1$ points de $\mathcal{A}$, où $N+1 = \dim(E)$.

Le résultat du développement est le suivant.

Théorème 4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension $N \in \mathbb{N}^*$, et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$.*

On se donne K une partie convexe compacte de E et on suppose que K est stable par tous les éléments de G. Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $g(x) = x$. Autrement dit, G possède un point fixe dans K.

Démonstration.

Remarquons que le résultat est vrai si K est réduit à un point $x \in E$: puisque K est stable par G, on a bien $\forall g \in G \quad g(x) = x$. On supposera dans la suite que K contient au moins deux points.

Comme $G \subset C(K,E)$[1] est compact, le théorème d'Ascoli affirme qu'en particulier, G est uniformément équicontinue, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in K \quad \forall g \in G \quad \|x - y\| \leq \alpha \Longrightarrow \|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon. \quad (\star)$$

1. On rappelle que les applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie sont toujours continues.

Pour $x \in K$, on pose $D(x) = \sup_{g,g' \in G} \|g(x) - g'(x)\|$: c'est le diamètre de l'orbite de x sous l'action de G.

Etape 1 : Montrons qu'il existe $\mathcal{A} \subset K$ non vide, stable par G tel que $\delta(\mathcal{A}) < \delta(K)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est compact non vide, on peut le recouvrir par un nombre fini $n \in \mathbb{N}^*$ de boules ouvertes $B(c_i, \alpha)$ où $c_1, \ldots, c_n \in K$ et α est une constante d'équicontinuité pour G. Donc

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \alpha).$$

Pour $c \in K$ et $g \in G$, il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $g^{-1}(c) \in B(c_i, \alpha)$, et on a alors

$$\|c - g(c_i)\| \leq \varepsilon.$$

Posons $x = \dfrac{c_1 + \cdots + c_n}{n}$. Alors $x \in K$ par convexité, et pour tout $c \in K$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} \|c - g(x)\| &= \left\| \frac{c - g(c_1) + \cdots + c - g(c_n)}{n} \right\| \\ &\leq \frac{\|c - g(c_1)\| + \cdots + \|c - g(g_n)\|}{n}. \end{aligned}$$

D'après ce qu'il précède, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|c - g(c_i)\| \leq \varepsilon$, et pour $j \in [\![1, n]\!]$ distinct de i, on a $\|c - g(c_j)\| \leq \delta(K)$ car $g(c_j) \in K$ (rappelons que par hypothèse, K est stable par G).

Il vient que $\|c - g(x)\| \leq \dfrac{(n-1)\,\delta(K) + \varepsilon}{n}$. Ainsi, pour $g, g' \in G$, en prenant $\varepsilon < \delta(C)$ et $c = g'(x)$, on a

$$\|g'(x) - g(x)\| \leq \frac{(n-1)\,\delta(K) + \varepsilon}{n}.$$

Donc

$$D(x) = \sup_{g,g'} \|g'(x) - g(x)\| < \delta(K).$$

En notant $\mathcal{A} = \{g(x) : \ g \in G\}$, on a donc $\delta(\mathcal{A}) = D(x) < \delta(K)$, et $\mathcal{A}$ est stable par G de par sa définition.

Etape 2 : Montrons qu'il existe $c_0 \in K$ tel que $D(c_0) = \min_{c \in K} D(c)$.

On se donne $\varepsilon > 0$. Comme G est équicontinu, il existe $\alpha > 0$ tel que $(\star)$ soit vérifié. Pour $x, y \in K$ tels que $\|x - y\| \leq \alpha$ et $g, g' \in G$, on a par inégalité triangulaire :

$$\|g(x) - g'(x)\| \leq \|g(x) - g(y)\| + \|g(y) - g'(y)\| + \|g'(y) - g'(x)\|$$

D'où

$$\|g(x) - g'(x)\| \leq \sup_{g,g' \in G} \|g(y) - g'(y)\| + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $g, g' \in G$, un passage à la borne supérieure donne

$$D(x) \leq D(y) + 2\varepsilon.$$

Par symétrie des rôles de x et de y, on en déduit également que $D(y) \leq D(x) + 2\varepsilon$, d'où

$$|D(x) - D(y)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre en particulier que D est continue sur K. Comme K est compact, elle est bornée et atteint ses bornes, donc il existe $c_0 \in K$ tel que $D(c_0) = \min_{c \in K} D(c)$.

Etape 3 : Montrons que c_0 est un point fixe de G.

On raisonne par l'absurde en supposant que c_0 n'est pas un point fixe de G, et on note

$$\mathcal{K} = \mathrm{Conv}(\overline{\{g(c_0) \ : \ g \in G\}}),$$

de sorte que $\mathcal{K}$ est l'enveloppe convexe[2] de l'orbite de c_0 dans G.

- Montrons que $\mathcal{K}$ est compact.
  D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{C} = \overline{\{g(c_0) \ : \ g \in G\}}$ est un compact. Posons
  $$\mathcal{E} := \{(t_1, \ldots, t_{N+1}) \in [0,1]^{N+1} \ : \ t_1 + \cdots + t_{N+1} = 1\}.$$
  On définit $f \colon \begin{cases} \mathcal{E} \times \mathcal{C}^{N+1} & \to \ \mathcal{K} \\ (t_1, \ldots, t_{N+1}, A_1, \ldots, A_{N+1}) & \mapsto \ t_1 A_1 + \cdots + t_{N+1} A_{N+1} \end{cases}$. La fonction f est continue car polynomiale, et d'après le théorème de Carathéodory, on a $f(\mathcal{E} \times \mathcal{C}^{N+1}) = \mathcal{K}$.
  Par ailleurs, $\mathcal{E}$ est compact en tant que fermé dans un compact, et $\mathcal{C}$ est compact. Donc $\mathcal{K}$ est un compact comme image continue d'un compact.

- Montrons que $\delta(K) = D(c_0)$.
  Remarquons que $D(c_0) = \delta(\mathcal{C})$. Il suffit de vérifier que $\delta(\mathcal{K}) = \delta(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{C} \subset \mathrm{Conv}(\mathcal{C}) = \mathcal{K}$, on a déjà $\delta(\mathcal{C}) \leq \delta(\mathcal{K})$.
  Soit $M \in \mathcal{K}$. D'après le théorème de Carathéodory, on peut écrire $M = t_1 A_1 + \cdots + t_{N+1} A_{N+1}$ avec $A_1, \ldots, A_{N+1} \in \mathcal{C}$ et $t_1, \ldots, t_{k+1} \geq 0$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Pour $N \in \mathcal{C}$, on a alors
  $$\begin{aligned} \|M - N\| &\leq t_1 \|A_1 - N\| + \cdots + t_{N+1} \|A_{N+1} - N\| \\ &\leq \delta(\mathcal{C}) \, (t_1 + \cdots + t_{N+1}) \\ &= \delta(\mathcal{C}). \end{aligned}$$
  Ainsi, la distance d'un point quelconque de $\mathcal{A}$ à un point quelconque de $\mathcal{K}$ est inférieure à $\delta(\mathcal{C})$. On en déduit que pour $P \in \mathcal{K}$,
  $$\begin{aligned} \|M - P\| &\leq t_1 \|A_1 - P\| + \cdots + t_{N+1} \|A_{N+1} - P\| \\ &\leq \delta(\mathcal{C})(t_1 + \cdots + t_{N+1}) \\ &= \delta(\mathcal{C}). \end{aligned}$$
  Par passage à la borne supérieure, il s'en suit que $\delta(\mathcal{K}) \leq \delta(\mathcal{C})$.

Finalement, $\mathcal{K}$ est un convexe compact qui possède au moins deux éléments (car on a supposé que c_0 n'était pas un point fixe de G), et $\delta(\mathcal{K}) = D(c_0)$.

D'après l'étape 1, il existe $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ non vide, invariante par G telle que $\delta(A) < \delta(K)$. Mais pour un certain $x \in \mathcal{A}$, on a $D(x) = \delta(A)$ par construction de $\mathcal{A}$. On en déduit que $D(x) < D(c_0)$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité. $\square$

2. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie X de E est définie comme le plus petit convexe de E qui contient X.