P. Maurer
ENS Rennes

Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.

Recasages : *190, 230, 266*.

Référence : J.R Norris, Markov Chains et cours de Thierry Levy, M1 à Sorbonne Université.

C'est un développement joli et original qui se recase bien dans des leçons un peu « galères ». Par contre, il demande de très bien maîtriser la théorie autour des chaînes de Markov, et il est assez long.

On commence par quelques rappels sur les chaines de Markov et les marches aléatoires. Pour plus de détails et en particulier les preuves, on pourra consulter le polycopié de Thierry Lévy disponible à l'adresse :

https://www.lpsm.paris/pageperso/levy/4M011_Poly.pdf

Dans les leçons 190 et 230, ces rappels n'ont pas à figurer dans le plan et sont considérés comme admis. Il faut bien sûr être capable de donner quelques idées de la construction et des preuves principales, car il risque d'y avoir quelques questions dessus, le développement étant tout de même assez difficile.

On se donne E un espace d'états dénombrable, P un noyau de transition sur E et $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une chaîne de Markov homogène, d'espace d'état E et de noyau de transition P.

1 Rappels

Définition 1. *Soit $x\in E$. On définit le nombre de visites N_x en x et le temps de retour T_x en x par*

$$N_x := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}} \quad \text{et} \quad T_x := \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = x\}.$$

Proposition 2. *Soit $x\in E$. Alors on est dans une et une seule des deux situation suivantes :*

- $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)=1$. *Dans ce cas, on dit que l'état x est récurrent, et on a $\mathbb{E}_x[N_x]=+\infty$.*
- $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)<1$. *Dans ce cas, on dit que l'état x est transient, et on a $\mathbb{E}_x[N_x]=\dfrac{1}{\mathbb{P}_x(T_x=\infty)}$.*

Définition 3. *On définit la fonction de Green de la chaîne de Markov par*

$$G : \begin{cases} E\times E & \rightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ (x,y) & \mapsto & \mathbb{E}_x[N_y] \end{cases}.$$

Proposition 4. *Soit $x, y\in E$. Alors*

- *On a $G(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(x,y)$.*
- *L'état x est récurrent si et seulement si $G(x,x)=+\infty$.*
- *Si $x\neq y$, on a $G(x,y)=\mathbb{P}_x(T_y<\infty)\,G(y,y)$.*
- *On a $G(x,x)=1+\mathbb{P}_x(T_x<\infty)\,G(x,x)$.*

- *On a* $G(x,y) \leq G(y,y)$.

Proposition 5. *Soit* $x, y \in E$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $G(x,y) > 0$,
2. $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$,
3. $\exists n \geq 0 \quad P^n(x,y) > 0$,
4. $\mathbb{P}_x(N_y \geq 1) > 0$.

Définition 6. *On dit que* x *mène à* y*, et on note* $x \to y$*, si* $G(x,y) > 0$*. La relation* $\sim$ *est réflexive et transitive sur* $E \times E$.

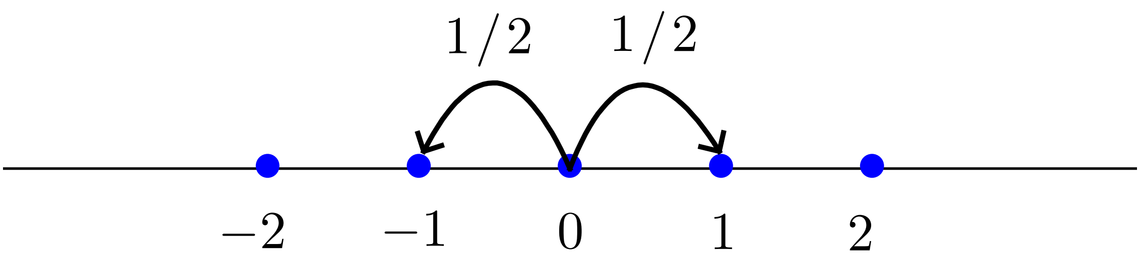
Proposition 7. *Soit* $x, y \in E$*. On suppose que* $x \to y$ *et que* x *est récurrent. Alors* $y \to x$ *et* y *est récurrent.*

Définition 8. *On dit que la chaîne de Markov* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}})$*, ou plus généralement que le noyau de transition* P *est irréductible, si pour tout* $x, y \in E$*, on a* $x \to y$.

Remarque 9. Si une chaîne de Markov est irréductible, il suffit d'exhiber un état récurrent pour conclure que tous ses états sont récurrents. On dit d'une chaîne dont tous les états sont récurrents qu'elle est récurrente.

Définition 10. *On définit la marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ *comme la chaîne de Markov d'espace d'état* $\mathbb{Z}$*, de noyau de transition* p *donné par* $p(x, x+1) = \frac{1}{2}$*,* $p(x, x-1) = \frac{1}{2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{Z}$.

On la définit également comme la suite de variables aléatoires $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$*, où les variables* ξ_i *sont indépendantes et de loi de Rademacher :* $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$.



Définition 11. *On définit la marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}^2$ *comme la chaîne de Markov d'espace d'état* $\mathbb{Z}^2$*, de noyau de transition* p *donné par* $p(i,j) = \begin{cases} 1/4 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On la définit également comme la suite de variables aléatoires $X_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_n, \sum_{k=1}^{n} \psi_n\right)$*, où pour* $n \in \mathbb{N}$*, le couple* (ξ_n, ψ_n) *de variable aléatoires a pour loi*

$$\mathbb{P}((\xi_n, \psi_n) = (1, 0)) = \mathbb{P}((\xi_n, \psi_n) = (-1, 0)) = \mathbb{P}((\xi_n, \psi_n) = (0, 1)) = \mathbb{P}((\xi_n, \psi_n) = (0, -1)) = \frac{1}{4},$$

les couples (ξ_n, ψ_n) *étant indépendants entre eux.*

Définition 12. *On définit la marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}^3$ *comme la chaîne de Markov d'espace d'état* $E = \mathbb{Z}^3$ *et de noyau de transition* P *donné par*

$$P(i, j) = \begin{cases} 1/6 \text{ si } |i - j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

2 Le développement

Théorème 13. *La marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$ *et sur* $\mathbb{Z}^2$ *est irréductible et récurrente. Sur* $\mathbb{Z}^3$*, elle est irréductible et transiente.*

Démonstration.

Etape 1 : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Vérifions rapidement l'irréductibilité. On se donne $x, y \in \mathbb{Z}$. Si $x = y$, on écrit

$$P^2(x, x) \geq P(x, x + 1)\, P(x + 1, x) = \frac{1}{4} > 0.$$

Si $x \neq y$, on peut supposer par symétrie que $x < y$. En notant $n = y - x$, il vient

$$P^n(x, y) \geq P(x, x + 1) \cdots P(y - 1, y) = \frac{1}{2^n} > 0.$$

On en déduit (proposition 5) que pour tout $x, y \in E$, on a $x \to y$. Donc la chaîne est irréductible. Pour montrer qu'elle est récurrente, il suffit donc de montrer que l'état 0 est récurrent. On écrit

$$G(0, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(0, 0).$$

Observons déjà que si n est impair, on a $P^n(0, 0) = 0$, et si $n = 2m$ pour $m \in \mathbb{N}$, alors $P^{2m}(0, 0) = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$. En effet, partant de zéro, il y a $\binom{2m}{m}$ possibilités pour revenir à zéro en $2m$ étapes (on choisit par exemple les m étapes où on se déplace vers la droite, et les m restantes sont alors nécessairement vers la gauche pour revenir à zéro). Comme chaque étape a une probabilité $\frac{1}{2}$, on en déduit le résultat.[1]

1. Plus formellement, on peut montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \binom{2m}{m}$, où

$$\mathcal{F} := \{(x_1, \ldots, x_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m} : x_1 = x_{2m} = 0 \text{ et } \forall i \in [\![1, 2m - 1]\!] \quad |x_{i+1} - x_i| = 1\}.$$

On pose $\mathcal{C} = \{A \subset \{1, \ldots, 2m\} : \mathrm{Card}(A) = m\}$ et $\mathcal{D} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_{2m}) \in \{-1, 1\}^{2m} : \xi_1 + \cdots + \xi_{2m} = 0\}$. Alors les applications φ et ψ suivantes sont bien définies, et bijectives :

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C} & \to \mathcal{D} \\ A & \mapsto \xi_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A \\ -1 \text{ si } i \notin A \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi\colon \begin{cases} \mathcal{D} & \to \mathcal{F} \\ (\xi_1, \ldots, \xi_{2m}) & \mapsto (\xi_1 + \cdots + \xi_i)_{1 \leq i \leq 2m} \end{cases}.$$

On en déduit que $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$, et $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \binom{2m}{m}$ par définition du coefficient binomial.

On a ainsi

$$G(0,0) = \sum_{m\in\mathbb{N}} P^{2m}(0,0) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

On applique alors la formule de Stirling : $m! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$ au terme général de la série précédente. Il vient :

$$\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m} = \frac{1}{2^{2m}}\cdot\frac{(2m)!}{(m!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2m}}\cdot\frac{2^{2m}\,m^{2m}\,e^{-2m}\sqrt{2\pi\times 2m}}{m^{2m}\,e^{-2m}\,2\pi m} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Le critère de Riemann affirme que la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{m}}$ diverge, donc le théorème d'équivalence des séries à termes positifs donne

$$G(0,0) = \sum_{m\in\mathbb{N}} P^{2m}(0,0) = +\infty.$$

Etape 2 : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$.

Pour $n \geq 1$, on pose $\xi_n^+ = \xi_n + \psi_n$ et $\xi_n^- = \xi_n - \psi_n$. Alors les variables ξ_n^+ et ξ_n^- sont indépendantes et de loi de Rademacher. En effet, on a :

- $\mathbb{P}(\xi_n^+ = 1) = \mathbb{P}(\xi_n^+ = -1) = \mathbb{P}(\xi_n^- = 1) = \mathbb{P}(\xi_n^- = -1) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{P}((\xi_n^+, \xi_n^-) = (1,1)) = \mathbb{P}((\xi_n^+, \xi_n^-) = (1,-1)) = \mathbb{P}((\xi_n^+, \xi_n^-) = (-1,1)) = \mathbb{P}((\xi_n^+, \xi_n^-) = (-1,-1)) = \frac{1}{4}$.

On en déduit qu'en posant $X_n^+ = \xi_1^+ + \cdots + \xi_n^+$ et $X_n^- = \xi_1^- + \cdots + \xi_n^-$, les suites $(X_n^+)_n$ et $(X_n^-)_n$ sont des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ indépendantes.[2]

Par ailleurs, comme $\xi_n = \frac{1}{2}(\xi_n^+ + \xi_n^-)$ et $\psi_n = \frac{1}{2}(\xi_n^+ - \xi_n^-)$, on a $X_n = (0,0)$ si et seulement si $(X_n^+, X_n^-) = (0,0)$. On en déduit, en utilisant l'indépendance de X_n^+ et X_n^-, que

$$P^{2n}(0,0) = \mathbb{P}_{(0,0)}(X_n = (0,0)) = \mathbb{P}_{(0,0)}((X_n^+, X_n^-) = (0,0)) = \mathbb{P}_0(X_n^+ = 0) \times \mathbb{P}_0(X_n^- = 0).$$

Finalement, comme $(X_n^+)_n$ et $(X_n^-)_n$ sont des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}_0(X_n^+ = 0) \times \mathbb{P}_0(X_n^- = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n},$$

et la série $\sum \frac{1}{\pi n}$ diverge, donc $\sum P^{2n}(0,0)$ diverge, donc la marche $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente.

Etape 3 : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$.

Partant de zéro, pour revenir en zéro en $2m$ étapes, il faut faire i pas vers le haut, i pas vers le bas, j pas vers l'est, j pas vers l'ouest, k pas vers le nord, k pas vers le sud, où $i + j + k = m$.

---

2. Ce joli argument se comprend très bien sur un dessin : à une constante $\frac{\sqrt{2}}{2}$ près, les marches (X_n^+) et (X_n^-) sont en fait les projections sur les diagonales de la marche (X_n) sur $\mathbb{Z}^2$. Le dessin est fait à la fin du développement.

En comptant les manière de faire ces pas, on en déduit que

$$P^{2m}(0,0)=\frac{1}{6^{2m}}\cdot\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}}\frac{(2m)!}{i!^2\,j!^2\,k!^2}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}P^{2m}(0,0) &= \binom{2m}{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}\cdot\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}}\binom{m}{i,j,k}^2\frac{1}{3^{2m}}\\ &= \binom{2m}{m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}\cdot\frac{1}{3^m}\cdot\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}}\binom{m}{i,j,k}^2\frac{1}{3^{i+j+k}}\end{aligned}$$

où $\binom{m}{i,j,k}:\overset{\text{def}}{=}\frac{m!}{i!\,j!\,k!}$ est un coefficient trinomial. Si $m=3\ell$ avec $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\binom{m}{i,j,k}=\binom{3\ell}{i,j,k}\leq\binom{3\ell}{\ell,\ell,\ell}.$$

On en déduit que

$$P^{6\ell}(0,0)\ \leq\ \binom{2m}{m}\cdot\binom{3\ell}{\ell,\ell,\ell}\cdot\frac{1}{2^{2m}}\cdot\frac{1}{3^{3\ell}}\cdot\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}}\binom{m}{i,j,k}\frac{1}{3^{i+j+k}}.$$

La formule du trinome (multinome) de Newton donne

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}}\binom{m}{i,j,k}\frac{1}{3^{i+j+k}}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)^3=1.$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}P^{6\ell}(0,0) &\leq \binom{6\ell}{3\ell}\cdot\binom{3\ell}{\ell,\ell,\ell}\cdot\frac{1}{2^{6\ell}}\cdot\frac{1}{3^{3\ell}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{m^{3/2}}\quad\text{pour un certain } C>0,\end{aligned}$$

où la dernière ligne s'obtient en utilisant la formule de Stirling.[3]

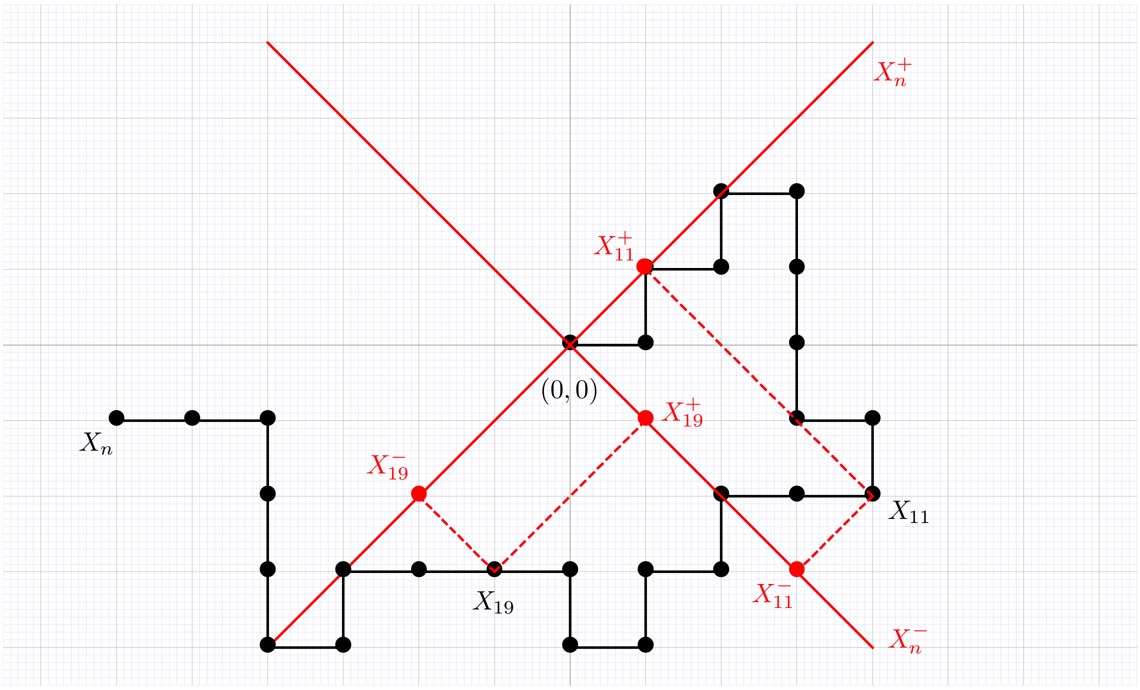
Par ailleurs, on a les inégalités $P^{6\ell}(0,0)\geq\left(\frac{1}{6}\right)^2P^{6\ell-2}(0,0)$ et $P^{6\ell}(0,0)\geq\left(\frac{1}{6}\right)^4P^{6\ell-4}(0,0)$, donc il existe $C'>0$ tel que

$$P^{2m}(0,0)\leq\frac{C}{m^{3/2}}.$$

Comme la série $\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^{3/2}}$ converge, on en déduit que $G(0,0)<\infty$, donc la chaîne est transiente. $\square$

3. C'est plutôt facile à obtenir (il suffit d'écrire Stirling et de tout simplifier), mais le développement est déjà trop long pour se permettre d'écrire tout le calcul.

3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$: l'argument géométrique



Sur le dessin, ce que l'on a appelé X_n^+ et X_n^- est en fait $\frac{\sqrt{2}}{2}\,X_n^+$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\,X_n^-$ si on veut garder la même définition que dans la démonstration, où on ne s'est pas embêté avec les constantes.

Si vous présentez ce développement, je vous conseille de faire le dessin sur l'annexe de votre plan et de dire au jury de le regarder quand vous faites la démonstration sur $\mathbb{Z}^2$, pour gagner un peu de temps.

Une autre possibilité est de ne faire que le dessin au tableau et pas la démonstration formelle, mais il faudra pouvoir répondre précisément à la question « Pourquoi (X_n^+) et (X_n^-) sont des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ indépendantes ? », et il vaut mieux y avoir un peu réfléchi avant, sinon ça peut mal se passer…

Pour finir, garder en tête que pour $d > 3$, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est toujours transiente. On peut le montrer de la même manière que pour $d = 3$ avec la formule du multinôme, mais ça devient assez moche à écrire.