P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *101, 105, 107, (191).*

Références : Caldero-Germoni, H2G2 & Peyré, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.

Fortement inspiré du travail de Florent Lemonnier.

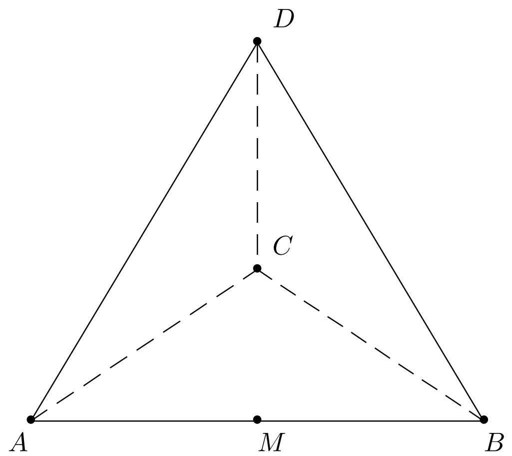
Isométries du tétraèdre et du cube. Table de $\mathcal{S}^4$

La première partie peut constituer elle-même un développement, qui convient dans les leçons 101, 105 ou 191, par exemple. Personnellement, je ne l'utilise pas à ce titre, mais le résultat $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) = \mathcal{S}_4$ est utile pour déterminer la table de $\mathcal{S}^4$.

1 Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Théorème 1. *Les groupes d'isométrie du tétraèdre sont* $\mathrm{Isom}(\Delta_4) = \mathcal{S}_4$ *et* $\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) = \mathcal{A}_4$.

Démonstration.



- On considère un tétraèdre $ABCD$ de base ABC, on note S l'ensemble des sommets $S = \{A, B, C, D\}$ du tétraèdre, et on pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{Isom}(\Delta_4) & \rightarrow & \mathcal{S}(S) \simeq \mathcal{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|S} \end{cases}$$

L'application φ définit un morphisme de groupes. On va montrer qu'elle est bijetive :

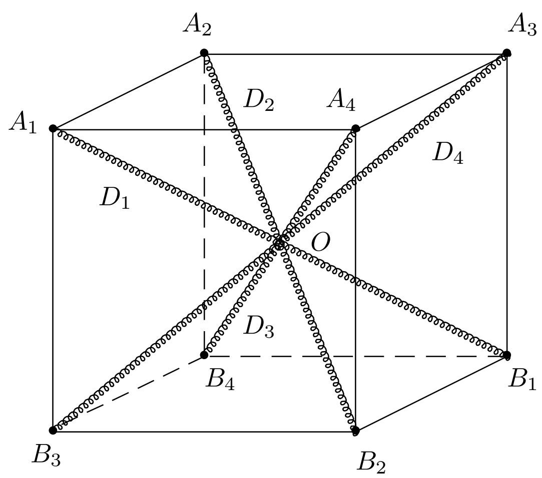
- D'une part, soit $g \in \mathrm{Isom}(\Delta_4)$ tel que $\varphi(g) = \mathrm{id}_S$. Alors g fixe A, B et D, qui forment un repère affine de l'espace, donc $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ceci montre l'injectivité.

- D'autre part, on remarque que la transposition (AB) est réalisée par la réfléxion par rapport au plan (MCD), où M désigne le milieu de (AB), et on obtient de manière similaire les autres transpositions. Puisque les transposition engendrent $\mathcal{S}_4$, on en déduit que φ est surjective.

- Finalement, l'application $\det \circ \varphi^{-1}$ est un morphisme non trivial de $\mathcal{S}_4$ dans $\{-1, 1\}$, donc c'est la signature ε, d'où $\det = \varepsilon \circ \varphi$. On en déduit que :

$$\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) = \mathrm{Ker}(\det) \simeq \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathcal{A}_4 \qquad \square$$

Théorème 2. *Les groupes d'isométrie du cube sont* $\mathrm{Isom}(C_6) = \mathcal{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *et* $\mathrm{Isom}^+(C_6) = \mathcal{S}_4$.



Démonstration. On considère l'ensemble $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ des grandes diagonales du cube. Elles sont conservées par les isométries (car ce sont les digonales de plus grande distance entre deux points du cube). On peut donc considérer l'action de $\mathrm{Isom}^+(C_6)$ sur D, dont on déduit le morphisme φ suivant :

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathrm{Isom}^+(C_6) & \to & \mathcal{S}(D) \simeq \mathcal{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|D} \end{cases}$$

- Montrons que φ est un isomorphisme de groupes.

  Tout d'abord, soit $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a $g_{|D} = \mathrm{id}_D$, donc $\varphi(g)$ stabilise les grandes diagonales, d'où deux possibilités pour chaque $i \in [\![1, 4]\!]$: soit $g(A_i) = A_i$ et $g(B_i) = B_i$, soit $g(A_i) = B_i$ et $g(B_i) = A_i$.

  Supposons qu'il existe $i \in [\![1, 4]\!]$ tel que $g(A_i) = A_i$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(A_1) = A_1$. Alors $A_1 A_2 = g(A_1)\, g(A_2) = A_1\, g(A_2)$, donc nécessairement $g(A_2) = A_2$ (puisque $A_1 A_2 \neq A_1 B_2$ et que g est une isométrie). De même, $g(A_3) = A_3$ et $g(A_4) = A_4$, et de fait, $g(B_i) = B_i$ pour tout i. Donc g fixe un repère affine de l'espace : on en déduit $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

On suppose désormais que $\forall i \in [\![1,4]\!]$ $g(A_i) = B_i$ et $g(B_i) = A_i$. En notant O le centre du cube et s_O la symétrie centrale par rapport à O, on a alors $s_O\, g(A_i) = A_i$ pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, donc $s_O\, g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ceci contredit que $g \in \mathrm{Isom}^+(C_6)$, donc ce cas n'est pas possible.

- Finalement, on justifie que φ est surjective en considérant le retournement d'axe (MN) pour représenter la transposition $(D_1\, D_2)$, où M et N sont les milieux des segments $[A_1\, A_2]$ et $[B_1\, B_2]$.

- On pose alors l'application :

$$\psi\colon \begin{cases} \mathrm{Isom}(C_6) & \to & \mathrm{Isom}^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g & \mapsto & \begin{cases} (g,0) \text{ si } \det(g) = 1 \\ (s_O\, g, 1) \text{ si } \det(g) = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Comme s_O et g fixent O et que leurs parties linéaires commutent (s_O étant une symétrie centrale, sa partie linéaire est $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$), on en déduit que $s_O\, g = g\, s_O$, ce qui justifie que ψ est un morphisme de groupes, et on vérifie sans peine qu'il est bijectif. □

2 Table de caractères de $\mathcal{S}^4$

On va dresser la table de caractères de $\mathcal{S}^4$.

Etape 1 : on détermine les classes de conjugaison de $\mathcal{S}^4$ et leur nombre d'élément.

On sait qu'une classe de conjugaison dans $\mathcal{S}^4$ est caractérisée entièrement par son type. On a donc les classes suivantes.

- $[1]$: La classe de l'identité, qui possède 1 élément.
- $[2]$: La classe des transpositions, qui possède $1! \times \binom{4}{2} = 6$ éléments.
- $[2,2]$: La classe des doubles transpositions, qui possède $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ éléments (le choix de la deuxième transposition divise par deux le nombre de possibilités)
- $[3]$: La classe des 3-cycles, qui possède $2! \times \binom{4}{3} = 8$ éléments (une fois les trois éléments du cycle choisis, on peut seulement obtenir deux cycles différents en modifiant leur ordre)
- $[4]$: La classe des 4-cycles, qui possède $3! \times \binom{4}{4} = 6$ éléments.

Etape 2 : premières représentations irréductibles de $\mathcal{S}^4$.

On sait que le nombre de représentations irréductibles de $\mathcal{S}^4$ est égal à son nombre de classes de conjugaisons : il y en a donc cinq.

- La représentation triviale V_1 est donnée par $\rho(\sigma) = 1$ sur un espace vectoriel de dimension 1. Son caractère vérifie $\chi_1(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}^4$, donc sur les classes de conjugaisons de $\mathcal{S}^4$ on a $\chi_1 = (1,1,1,1,1)$.
- La représentation alternée V_ε est donnée par $\rho(g) = \varepsilon(\sigma)$ sur un espace vectoriel de dimension 1. Son caractère χ_ε vérifie $\chi_\varepsilon = (1,-1,1,1,-1)$ sur les classes de conjugaisons de $\mathcal{S}^4$.

Etape 3 : on s'intéresse à la représentation par permutations de $\mathcal{S}^4$, donnée par

$$\rho_P(\sigma) = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(4)} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}).$$

Par définition, $\langle \chi_P, \chi_P\rangle = \frac{1}{|\mathcal{S}_4|} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4} \overline{\chi_P(\sigma)}\,\chi_P(\sigma)$. Pour $\sigma\in\mathcal{S}_4$ fixé, $\chi_P(\sigma) = |\{i\in[\![1,4]\!] : \sigma(i)=i\}|$, donc comme χ_P est constant sur les classes de conjugaisons de $\mathcal{S}^4$, il vient $\chi_P = (4,2,0,1,0)$ donc

$$\langle \chi_P, \chi_P\rangle = \frac{1}{24}\times(1\times 4^2 + 6\times 2^2 + 3\times 0^2 + 8\times 1^2 + 6\times 0^2) = \frac{48}{24} = 2.$$

Aussi, la représentation par permutation n'est pas irréductible. Elle admet en fait pour sous espace stable $\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ qui a pour supplémentaire l'hyperplan $H = \{x+y+z+t=0\}$, également stable par l'action de $\mathcal{S}^4$. Aussi, la représentation par permutation induit la représentation triviale sur $\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ et elle induit la représentation dite standard sur H, dont on notera χ_S le caractère, de sorte que

$$\chi_P = \chi_1 + \chi_S.$$

On en déduit que $\chi_S = (3,1,-1,0,-1)$, et on a alors

$$\langle \chi_S, \chi_S\rangle = \frac{1}{24}(1\times 3^2 + 6\times 1^2 + 3\times(-1)^2 + 8\times 0^2 + 6\times(-1)^2) = \frac{24}{24} = 1.$$

Donc la représentation standard est irréductible. A ce stade, on a donc la table de caractères partielle suivante pour $\mathcal{S}^4$.

	$[1]$	$[2]$	$[2,2]$	$[3]$	$[4]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_s	3	1	-1	0	-1
?					
?					

Etape 4 : détermination des deux dernières représentations irréductibles.

Notons W et C les représentations restantes. La formule de Burnside donne

$$\sum_{V\in\mathrm{Irr}(\mathcal{S}^4)} \dim(V)^2 = |\mathcal{S}^4|$$

On en déduit que $1+1+3^2+\dim(W)^2+\dim(C)^2 = 24$, donc

$$\dim(W)^2+\dim(C)^2 = 13.$$

La seule possibilité est alors que l'un des deux nombres parmi $\dim(W)$ et $\dim(C)$ vale 2, et l'autre 3. Par symétrie, on supposera $\dim(W)=2$ et $\dim(C)=3$.

D'après le résultat de la partie 1 de ce document, on a $\mathcal{S}^4 \simeq \mathrm{Isom}^+(C_6)$. Ceci nous donne une représentation naturelle de $\mathcal{S}^4$ de dimension 3 sur les isométries du cube de déterminant 1. Ces dernières sont des rotations vectorielles qui ont pour trace $1+2\cos(\theta)$, où θ est leur angle de rotation.

Déterminons l'action de $\mathcal{S}^4$ sur les grandes diagonales du cube, selon les classes de conjugaison.[1]

- La transposition (12) correspond à une rotation d'angle π sur un axe reliant les milieux de deux côtés opposés. On a donc $\chi_C([2]) = 1+2\cos(\pi) = -1$.

1. Comme l'explique Florent Lemonnier dans son développement sur le même thème, le mieux à faire pour présenter cette partie est de réaliser un patron de cube d'environ 5 cm d'arrête pendant sa préparation. On peut alors numéroter les grandes diagonales sur chaque face du cube avec des couleurs, ce qui rend beaucoup plus facile l'explication devant le jury qu'avec des dessins au tableau, surtout lorsqu'on a autant de mal que moi à se représenter des figures dans l'espace sans support…

- La double transposition $(12)\,(34)$ correspond à une rotation d'angle π sur un axe reliant les centres de deux faces opposées. On a donc $\chi_C([2,2]) = 1 + 2\cos(\pi) = -1$.

- Le 3-cycle (123) correspond à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ sur une grande diagonale. On a donc $\chi_C([3]) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

- Le 4-cycle (1234) correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur un axe reliant les centres de deux faces opposées. On a donc $\chi_C([4]) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

On en déduit que $\chi_C = (3, -1, -1, 0, 1)$ sur les classes de conjugaison de $\mathcal{S}^4$.

Ceci nous donne la table

	$[1]$	$[2]$	$[2,2]$	$[3]$	$[4]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_s	3	1	-1	0	-1
χ_W	2	a	b	c	d
χ_C	3	-1	-1	0	1

.

Finalement, on obtient la valeur de $\chi_W = (2, a, b, c, d)$ en utilisant les relations d'orthogonalité des caractères. De fait, pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$, on a

$$\sum_{V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{S}^4)} \dim V \cdot \chi_W(\sigma) = 0.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} 1 - 1 + 3 - 3 + 2a = 0 \\ 1 + 1 - 3 - 3 + 2b = 0 \\ 1 + 1 + 0 + 0 + 2c = 0 \\ 1 - 1 - 3 + 3 + 2d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

On obtient la table des caractères complète de $\mathcal{S}^4$:

	$[1]$	$[2]$	$[2,2]$	$[3]$	$[4]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_s	3	1	-1	0	-1
χ_W	2	0	2	-1	0
χ_C	3	-1	-1	0	1

.