P. Maurer

ENS Rennes

**Référence :** Je n'en ai pas trouvé à ce jour.

**Recasage :** *190*.

# Formule du crible par les involtions alternantes

On commence par des rappels sur les involutions alternantes d'un ensemble fini. On considère à ce propos un ensemble $A$ fini, partitionné en $A_+$ et $A_-$.

**Définition 1.** *On dit que $f: A \to A$ est une involution alternante si*

1. $f \circ f = \mathrm{Id}_A$,
2. $\forall x \in A_+ \quad x \neq f(x) \Longrightarrow f(x) \in A_-$,
3. $\forall x \in A_- \quad x \neq f(x) \Longrightarrow f(x) \in A_+$.

**Notation 2.** *Soit $f$ une involution alternante sur $A$. On note $F_f(A_+)$, respectivement $F_f(A_-)$, l'ensemble des points fixes de $f$ sur $A_+$, respectivement sur $A_-$.*

**Proposition 3.** *Si $f$ est une involution alternante dans $A$, alors elle vérifie*

$$|F_f(A_+)| - |F_f(A_-)| \;=\; |A_+| - |A_-|.$$

**Démonstration.**

Il s'agit de montrer que $|A_+ \setminus F_f(A_+)| = |A_- \setminus F_f(A_-)|$.

Montrons d'abord que $f(A_+ \setminus F_f(A_+)) \subset A_- \setminus F_f(A_-)$.

Soit $x \in A_+ \setminus F_f(A_+)$. Comme $f$ est une involution alternante, on a $f(x) \in A_-$. Par ailleurs, on a $f(f(x)) = x \notin A_-$, donc $f(x) \notin F_f(A_-)$.

Ainsi, on a $f(A_+ \setminus F_f(A_+)) \subset A_- \setminus F_f(A_-)$, et on montre de même que $f(A_- \setminus F_f(A_-)) \subset A_+ \setminus F_f(A_+)$. Il vient donc

$$|f(A_+ \setminus F_f(A_+))| \leq |A_- \setminus F_f(A_-)| \quad \text{et} \quad |f(A_- \setminus F_f(A_-))| \leq |A_+ \setminus F_f(A_+)|.$$

Comme $f$ est bijective, $|f(A_+ \setminus F_f(A_+))| = |A_+ \setminus F_f(A_+)|$ et $|f(A_- \setminus F_f(A_-))| = |A_- \setminus F_f(A_-)|$, donc le résultat suit. $\square$

**Théorème 4.** *(Formule du crible de Poincaré)*

*Soit $E$ un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. Alors*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \;=\; \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} N_I,$$

*avec* $N_I := \left| \bigcap_{k \in I} A_k \right|$.

**Démonstration.**

Pour $x \in E$, notons $I_x := \{k \in [\![1, n]\!] \,:\, x \in A_k\}$.

On pose $A := \{(x, I) \in E \times \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \,:\, I \subset I_x\}$. C'est un ensemble fini que l'on partitionne en

$$A_+ := \{(x, I) \in A \,:\, |I| \in 2\mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad A_- := \{(x, I) \in A \,:\, |I| \in 2\mathbb{N} + 1\}.$$

**Etape 1 :** On définit alors l'application

$$f \colon \begin{cases} A & \to \; A \\ (x, \varnothing) & \mapsto \; (x, \varnothing) \text{ si } I_x = \varnothing \\ (x, I) & \mapsto \; \begin{cases} (x, I \cup \{\max\{I_x\}\}) \text{ si } \max\{I_x\} \notin I \\ (x, I \setminus \{\max\{I_x\}\}) \text{ si } \max\{I_x\} \in I \end{cases} \end{cases}.$$

L'application $f$ est clairement involutive de par sa définition. Remarquons que pour $(x, I) \in A$, $(x, I)$ est un point fixe de $f$ si et seulement si $I_x = \varnothing$.

Pour $(x, I)$ tel que $I_x \neq \varnothing$, notons $f(x, I) = (x, J)$. Alors $J$ contient un élément de plus ou de moins que $I$, donc $|J|$ et $|I|$ sont de parité inverse. Ainsi, $f$ envoie $A_+ \setminus F_f(A_+)$ dans $A_-$ et $A_- \setminus F_f(A_-)$ dans $A_+$, donc c'est une involution alternante de $A$.

**Etape 2 :** Montrons que $\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |E| + |A_-| - |A_+|$.

On va utiliser la formule de la proposition 3. Pour ce faire, on calcule :

$$\begin{aligned} F_f(A_-) &= \{(x, I) \in A \,:\, |I| \in 2\mathbb{N} + 1\} \cap \{(x, I) \in A \,:\, I_x = \varnothing\} \\ &= \varnothing \text{ car } |\varnothing| \in 2\mathbb{N}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_f(A_+) &= \{(x, I) \in A \,:\, |I| \in 2\mathbb{N}\} \cap \{(x, I) \in A \,:\, I_x = \varnothing\} \\ &= \{(x, \varnothing) \,:\, x \in E \text{ et } I_x = \varnothing\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{(x, \varnothing) \,:\, x \in A_k^c\}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|F_f(A_-)| = 0 \quad \text{et} \quad |F_f(A_+)| = \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_k^c \right| = |E| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Le résultat suit alors de la propisiton 3.

**Etape 3 :** Montrons que $|A_+| = \sum_{\substack{I \subset [\![1, n]\!] \\ |I| \in 2\mathbb{N}}} N_I$ et $|A_-| = \sum_{\substack{I \subset [\![1, n]\!] \\ |I| \in 2\mathbb{N}+1}} N_I$.

Par définition, $A_+ = \{(x, I) \in E \times \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \,:\, I \subset I_x \text{ avec } |I| \in 2\mathbb{N}\}$. On peut donc écrire

$$A_+ \;=\; \bigcup_{\substack{I \subset [\![1, n]\!] \\ |I| \in 2\mathbb{N}}} \{(x, I) \in E \times \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \,:\, I \subset I_x\}$$

Par ailleurs, pour $I\subset[\![1,n]\!]$, on a $I\subset I_x \Longleftrightarrow \forall i\in I \quad x\in A_i$. On en déduit que

$$A_+ = \bigcup_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|\in 2\mathbb{N}}} \bigcap_{i\in I} \{(x,I)\in E\times\mathcal{P}([\![1,n]\!])\ :\ x\in A_i\}.$$

Remarquons que pour $I\subset[\![1,n]\!]$ de cardinal pair et $i\in I$ fixés, $|\{(x,I)\in E\times\mathcal{P}([\![1,n]\!])\ :\ x\in A_i\}|=|A_i|$. Par ailleurs, en notant $L_I:=\bigcap\limits_{i\in I}\{(x,I)\in E\times\mathcal{P}([\![1,n]\!])\ :\ x\in A_i\}$, les ensembles $L_I$ et $L_J$ sont disjoints dès que $I\neq J$, puisqu'on a alors $(x,I)\neq(x,J)$ quelque soit $x\in E$.
Ainsi, on obtient le cardinal de $A_+$ :

$$\begin{aligned} |A_+| &= \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|\in 2\mathbb{N}}} |L_I| \\ &= \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|\in 2\mathbb{N}}} N_I \quad \text{par définition de } N_I. \end{aligned}$$

On en déduit de même le cardinal de $A_-$.
**Etape 4 :** Conclusion.
On a donc, d'après les étapes 2 et 3 :

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| &= |E|+|A_-|-|A_+| \\ &= |E|+\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|\in 2\mathbb{N}+1}} N_I - \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|\in 2\mathbb{N}}} N_I. \end{aligned}$$

Remarquons que pour $I=\varnothing$, on a $\bigcap\limits_{k\in I} A_k=\bigcap\limits_{k\in\varnothing} A_k=E$, donc $|N_\varnothing|=|E|$.
Il s'en suit que

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\varnothing}} (-1)^{|I|-1} N_I.$$

□

**Remarque 5.** On peut ré-écrire la formule en regroupant entre elles les parties de même cardinal, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=k}} (-1)^{k-1} N_I \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{k\in I} A_k\right|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, une partie $I$ de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $k$ correspond à un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ de la forme $\{i_1,\dots,i_k\}$ avec $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$, donc on peut écrire

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} |A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|.$$

Ceci est la formule du crible de Poincaré telle qu'elle est généralement enseignée.