P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : 155, 156, 158, 160.

Référence : FGN, Oraux X-ENS, Algèbre 2.

Homéomorphisme $\exp\colon \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Dans tout ce qui suit, $n \geq 1$ est un entier. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme d'opérateur $\|.\|$, induite par la norme euclidienne $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1. *Pour* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *on a* $\|A\| = \rho(A) := \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

Démonstration. On montre les deux inégalités :

- Notons λ_0 une valeur propre de A telle que $|\lambda_0| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, et $X \in \mathbb{R}^n$ non nul un vecteur propre associé à λ_0. Quitte à diviser X par sa norme, on p$(Y := P^{-1}Y)$eut supposer $\|X\|_2 = 1$.

  On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \rho(A) & = & |\lambda_0| \\ & = & \|\lambda_0 X\|_2 \\ & = & \|AX\|_2 \\ & \leq & \|A\| \cdot \|X\| \\ & = & \|A\| \end{array}$$

- Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,P^{-1}$.

  On a alors, pour $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 :

$$\begin{array}{lrcl} & \|AX\|_2 & = & \|P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1} X\|_2 \\ (P \text{ est orthogonale}) & & = & \|\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1} X\|_2 \\ (Y := P^{-1}X) & & = & \|\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) Y\|_2 \\ & & = & \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \right\|_2 \\ & & = & \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |y_i|^2} \\ & & \leq & \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho(A)^2 |y_i|^2} \\ & & = & \rho(A)\, \|P^{-1}X\|_2 \\ (P^{-1} \text{ est orthogonale}) & & = & \rho(A)\, \|X\|_2 \end{array}$$

  Ceci est vrai pour tout $X \in B(0,1)$, donc par passage à la borne supérieure, $\|A\| \leq \rho(A)$. □

Lemme 2. *Soit* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *deux matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On suppose que* $\exp(A) = \exp(B)$*. Alors* $A = B$*.*

Démonstration. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1}$. Alors $\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\, P^{-1}$. $\quad (\star)$

Par ailleurs, en notant $\mu_1, \ldots \mu_s$ les valeurs propres *distinctes* de A ($s \leq n$), il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(e^{\mu_k}) = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, par exemple en prenant le polynôme interpolateur de Lagrange :

$$Q(X) := \sum_{k=1}^{s} \mu_k \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i \neq k}} \frac{X - e^{\lambda_i}}{e^{\lambda_k} - e^{\lambda_i}}$$

On en déduit en particulier que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De fait :

$$Q(\exp(A)) \;=\; P\,\mathrm{diag}(Q(e^{\lambda_1}), \ldots, Q(e^{\lambda_n}))\, P^{-1} = A$$

Donc A s'écrit comme polynôme en $\exp(A)$. De plus, B commute avec $\exp(B) = \exp(A)$, on en déduit que B commute avec $A = Q(\exp(A))$.

A et B sont donc codiagonalisables. On déduit alors de $(\star)$ que $(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) = (e^{\omega_1}, \ldots, e^{\omega_n})$, où $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les valeurs propres de B. Par injectivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, ceci donne $\lambda_i = \omega_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et donc $A = B$ - toujours en utilisant $(\star)$. $\square$

Théorème 3. *L'application exponentielle* $\exp\colon \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration.

- **Etape 1 : exp:$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie, et continue.**

  Soit $M \in \mathcal{S}_n$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, P^T$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de M.

  On a donc, par continuité du produit : $\exp(M) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\, P^T$. On en déduit en particulier que $\exp(M)$ est symétrique, définie et positive.

  Par ailleurs, elle est continue puisque l'exponentielle de matrice l'est.

- **Etape 2 : exp:$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bijective.**

  Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P\,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, P^T$, avec $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$. Alors, la matrice $\ln(B) := P\,\mathrm{diag}(\ln(\mu_1), \ldots, \ln(\mu_n))\, P^T$ vérifie $\exp(\ln(B)) = A$.

  Par ailleurs, une matrice symétrique réelle étant diagonalisable, le lemme 2 montre directement l'injectivité. Donc exp:$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une bijection.

- **Etape 3 : l'application réciproque est continue.**

  On va montrer la continuité par caractérisation séquentielle. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

  Pour tout $k \geq 0$, on note $B_k \in S_n(\mathbb{R})$ l'unique matrice telle que $\exp(B_k) = A_k$, et on note $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'unique matrice telle que $\exp(B) = A$. Il s'agit de montrer que $(B_k)_{k \geq 0}$ converge vers B.

Tout d'abord, on vérifie que la seule valeur d'adhérence de $(B_k)_{k\geq 0}$ est B. En effet, s'il existe une sous-suite $(B_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ de $(B_k)_{k\geq 0}$ qui converge vers une matrice $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors par continuité de l'exponentielle, il vient $\exp(M)=A$, donc $\exp(M)=\exp(B)$: l'injectivité permet de conclure que $M=B$.

Pour conclure, il faut prouver que la suite $(B_k)_{k\geq 0}$ est bornée. En effet, en dimension finie, une suite bornée qui a une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Comme la suite $(A_k)_{k\geq 0}$ converge, elle est bornée, et par continuité de l'inverse, il en va de même de la suite $(A_k^{-1})_{k\geq 0}$. Il existe donc $c, C\in\mathbb{R}$ tels que $\|A_k\|\leq C$ et $\|A_k^{-1}\|\leq c$ pour tout $k\geq 0$. D'après le lemme 1, ceci donne $\rho(A_k)\leq C$ et $\rho(A_k^{-1})\leq c$.

Donc pour toute valeur propre $\lambda\in\mathrm{Sp}(A_k)$, on a $\lambda\leq C$ et pour toute valeur propre $\mu\in\mathrm{Sp}(A_k^{-1})$, on a $\mu\leq c$.

Puisque $\mathrm{Sp}(A_k^{-1})=\left\{\dfrac{1}{\lambda}\ :\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A_k)\right\}$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A_k sont dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{c}, C\right]$, et ce, pour tout $k\geq 0$.

Finalement, les valeurs propres des B_k sont donc dans l'intervalle fermé $[-\ln(c), \ln(C)]$, donc :

$$\forall k\geq 0\quad \|B_k\|\leq\max\left(|-\ln(c)|, |\ln(C)|\right).$$

La suite $(B_k)_{k\geq 0}$ est bornée, et ceci conclut la preuve. $\square$

Références

FGN, *Algèbre 2*.