P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : 241 (?), 243, 264

Référence : Candelpergher, Théorie des probabilités pour le théorème.

Sujet de l'épreuve de Maths 2 du concours HEC, option économique, session 2004 pour l'application (essentiellement la partie II).

Fonction génératrice d'une variable aléatoire et moments

Dans tout ce qui suit, X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Commençons par quelques brefs rappels sur les fonctions génératrices :

Définition 1. *On définit la fonction (ou série) génératrice de X comme la série entière $G_X(t) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k)t^k$.*

Proposition 2. *Le rayon de convergence R de la série entière $G_X(t)$ est supérieur ou égal à 1. La fonction $t \mapsto \mathbb{E}[t^X]$ est bien définie et à valeurs finies pour $t \in]-R, R[\cup \{-1, 1\}$, et vérifie alors $\mathbb{E}[t^X] = G_X(t)$.*

Démonstration.

Pour $t \in [-1, 1]$, on a $|\mathbb{P}(X=k)\, t^k| \leq \mathbb{P}(X=k)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=1$, donc la série $G_X(t)$ converge absolument. On en déduit que $R \geq 1$.

Le théorème de transfert donne $\mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)t^k$ pour tout t tel que la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k)t^k$ converge, donc en particulier sur $]-R, R[\cup \{-1, 1\}$ d'après ce qui précède. □

Proposition 3.

1. *La fonction génératrice de X sur $[-1, 1]$ détermine entièrement la loi de X.*

2. *Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.*

Démonstration.

1. La série entière G_X est dérivable sur le disque ouvert $D(0, R)$, donc en particulier sur $]-1, 1[$ et on a $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit X, Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On calcule

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X+Y=k)\, t^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(\bigcup_{\ell\geq 0} \{Y=\ell\}\cap\{X=k-\ell\}\right) t^k \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\ell\geq 0} \mathbb{P}(Y=\ell)\,\mathbb{P}(X=k-\ell)\right) t^k \\ &= \left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Y=k)\, t^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k)\, t^k\right) \\ &= G_X(t)\, G_Y(t). \end{aligned}$$

□

Théorème 4. *La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche au point 1, et dans ce cas, on a $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.*

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que X est d'espérance finie. Alors la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n)$ converge, et pour tout $x \in [-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\frac{x^n-1}{x-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,(1+\cdots+x^{n-1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\mathbb{P}(X=n)(1+\cdots+x^{n-1}) \underset{x\to 1^-}{\to} n\mathbb{P}(X=n)$, et la domination

$$|\mathbb{P}(X=n)\,(1+\cdots+x^{n-1})| \leq n\,\mathbb{P}(X=n),$$

où $n\mathbb{P}(X=n) \in L^1(m)$, avec m la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) \\ &= \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

On en déduit que G_X est dérivable en 1 à gauche et que $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que G_X soit dérivable en 1 à gauche.

La fonction G_X est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in]0,1[$, il existe $s \in]x,1[$ tel que

$$\frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} = G_X'(s).$$

Comme la fonction $s \mapsto G_X'(s) = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n)\, s^{n-1}$ est croissante, elle admet une limite $S \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Par ailleurs, on a $\dfrac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} \underset{x\to 1^-}{\to} G_X'(1)$ donc en particulier, la fonction $t \mapsto G_X'(t)$ est majorée sur l'intervalle $[0,1[$. On en déduit que S est fini.

Par croissance de $t \mapsto G'_X(t)$, on a $G'_X(t) \leq S$ pour tout $t \in [0,1[$. Comme les coefficients de $G'_X(t)$ sont positifs, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a donc

$$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n)\,t^{n-1} \;\leq\; S.$$

Par passage à la limite quand $t \to 1^-$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n) \;\leq\; S.$$

Aussi, la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n)\right)_{N\geq 1}$ est croissante et majorée donc converge. On en déduit que X admet une espérance, et le travail effectué pour l'implication directe montre qu'on a alors $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$. □

Application 5. (Temps d'attente de deux faces consécutives)

On effectue des lancers indépendants d'une pièce, avec une probabilité $p \in]0,1[$ de faire face et $1-p$ de faire pile. On s'arrête lorsque l'on obtient deux faces consécutives, et on note X la variable aléatoire qui donne le rang de la première configuration « Face, Face ».

Alors $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1+p}{p^2}$.

Démonstration. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, F_n l'évènement « face apparaît au lancer n », et P_n l'évènement « pile apparaît au lancer n ».

Pour $n \leq 3$, on a $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = 0$, $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = p^2$, et $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3) = (1-p)\,p^2$. Par ailleurs, pour $n \geq 4$, l'évènement $\{X=n\}$ est de la forme :

$$E = P_1 \cap A_{n-2} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n \quad \text{ou} \quad F = F_1 \cap P_2 \cap A_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n,$$

où les évènements A_k sont constitutés de k intersections de P_i et F_i, sans jamais qu'il y ait deux faces consécutives. Comme E et F sont disjoints de par leurs premiers éléments, on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) \\
&= (1-p)\,\mathbb{P}(X=n-1) + p\,(1-p)\,\mathbb{P}(X=n-2).
\end{aligned}$$

On calcule alors la fonction génératrice de X. Pour $t \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,t^n \\
&= p^2\,t^2 + p^2(1-p)\,t^3 + \sum_{n=4}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,t^n \\
&= p^2\,t^2 + p^2(1-p)\,t^3 + \sum_{n=4}^{+\infty} (1-p)\,\mathbb{P}(X=n-1)\,t^n + \sum_{n=4}^{+\infty} p(1-p)\,\mathbb{P}(X=n-2)\,t^n.
\end{aligned}$$

Via un changement de variable adéquat, on a

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n-1)\,t^n = t\sum_{n=3}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,t^n \ \text{ et } \ \sum_{n=4}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n-2)\,t^n = t^2\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,t^n.$$

On en déduit l'équation suivante sur $G_X(t)$:

$$G_X(t) \;=\; p^2\,t^2+p^2(1-p)\,t^3+(1-p)\,t\,(G_X(t)-p^2\,t^2)+p(1-p)\,t^2\,G_X(t),$$

d'où :

$$\begin{aligned} G_X(t)[1-(1-p)\,t-p(1-p)\,t^2] &= p^2\,t^2+p^2(1-p)\,t^3-(1-p)p^2\,t^3 \\ &= p^2\,t^2. \end{aligned}$$

Pour $t=1$, on a $1-(1-p)\,t-p(1-p)\,t^2=p^2>0$, donc sur un voisinnage de 1, on peut écrire

$$G_X(t) \;=\; \frac{p^2\,t^2}{1-(1-p)\,t-p(1-p)\,t^2}.$$

D'une part, $G_X(1)=1$, donc $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X=n)=1$. Aussi, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0}\{X=n\}\right)=1$, donc la configuration « Face, Face » est atteinte presque sûrement au cours d'une infinité de lancers.

Par ailleurs, G_X est dérivable en 1 donc d'après ce qui précède, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= G'_X(1) \\ &= \frac{1+p}{p^2}. \end{aligned}$$

□

Application 6. (Temps d'attente de la première configuration « Pile, Pile, Face »

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par R_n l'évènement « pile apparaît au lancer n » et par S_n l'évènement : « face apparaît au lancer n ».

Soit Y la variable aléatoire désignant le premier rang pour lequel la configuration pile, pile, face apparaît si cette configuration apparaît, et zéro sinon. Alors Y admet une espérance et $\mathbb{E}[Y]=8$.

Démonstration. A faire en s'inspirant de la correction de HEC ECE 2004 M2. □