P. Maurer

ENS Rennes

**Recasages :** 259, 239, 245, 265.

**Références :** Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation

# Prolongement de $\Gamma$ à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$

**Théorème 1.** *La fonction $\Gamma$ définie par $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0=\{\mathrm{Re}>0\}$.*

*Elle se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler*

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-\quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}.$$

**Démonstration.**

**Etape 1 : montrons que $\Gamma$ est holomorphe sur $\Omega_0$.**

Pour cela, on va utiliser le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. On se donne $a$ et $b$ deux réels tels que $0<a<b<+\infty$, et on considère le compact $K_{a,b}:=\{z\in\Omega_0\ :\ a\leq\mathrm{Re}(z)\leq b\}$.

On considère la fonction $\gamma$ définie sur $K_{a,b}\times]0,+\infty[$ par $\gamma(z,t):=t^{z-1}e^{-t}$.

- Pour tout $z\in K_{a,b}$, $t\mapsto\gamma(z,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- Pour presque tout $t\in]0,+\infty[$, $z\mapsto\gamma(z,t)$ est holomorphe sur $K_{a,b}$.
- Pour $(z,t)\in K_{a,b}\times]0,+\infty[$, on a la domination suivante :

$$\begin{aligned}|t^{z-1}e^{-t}| &= |e^{(z-1)\log(t)}e^{-t}|\\ &\leq e^{\log(t)\mathrm{Re}(z-1)}e^{-t}\\ &\leq \begin{cases} e^{\log(t)(b-1)}e^{-t} & \text{si}\quad t\geq 1\\ e^{\log(t)(a-1)}e^{-t} & \text{si}\quad t\leq 1\end{cases} =:\varphi(t)\end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque $t\to0$, on a l'équivalent $e^{\log(t)(a-1)}e^{-t}\underset{t\to0}{\sim}t^{a-1}$ et $a-1>-1$ donc l'intégrale $\int_0^1 t^{a-1}\,dt$ converge.

Lorsque $t\to+\infty$, on a $e^{\log(t)(b-1)}e^{-t}=\underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t/2})$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}e^{-t/2}\,dt$ converge.

Le théorème de comparaison des intégrales à termes positifs montre que $\varphi\in L^1(]0,+\infty[)$.

Donc $\Gamma$ est holomorphe sur $K_{a,b}$. Par ailleurs, pour tout $z\in\Omega_0$, il existe $0<a<b<+\infty$ tels que $z\in K_{a,b}$ (par exemple $a=\frac{\mathrm{Re}(z)}{2}$ et $b=2\mathrm{Re}(z)$). Donc $\Gamma$ est holomorphe au point $z$.

Ceci étant vrai pour tout $z\in\Omega_0$, on en déduit que $\Gamma$ est holomorphe sur $\Omega_0$ tout entier.

**Etape 2 : montrons la formule d'Euler $\boldsymbol{\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z\, n!}{z\,(z+1)\cdots(z+n)}}$ pour $\boldsymbol{z\in\Omega_0}$.**

On fixe $z\in\Omega_0$, et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad f_n(t) \;=\; \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\gamma(z,t)=\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)\, t^{z-1}\, e^{-t}$. Par ailleurs, on a la domination

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}\quad |f_n(t)| \;&\le\; \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)\left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n t^{z-1}\\ &=\; \gamma(z,t),\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de convexité $e^x\ge x+1$ valable pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\forall z\in\Omega_0\quad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}}\gamma(z,t)\,dt$$

Autrement dit,

$$\forall z\in\Omega_0\quad \Gamma(z) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt.$$

On fait le changement de variable $t=ns$ dans cette intégrale, qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il vient, pour $z\in\Omega_0$ :

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \;&=\; \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1-s)^n\, n^{z-1}\, s^{z-1}\, n\,ds\\ &=\; \lim_{n\to+\infty} n^z\int_0^1 (1-s)^n\, s^{z-1}\,ds.\end{aligned}$$

Notons $I_n(z):=\int_0^1(1-s)^n\,s^{z-1}\,ds$. On va montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la proposition

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ ''\ \forall z\in\Omega_0\quad I_n(z)=\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ ''.$$

- **Initialisation :** pour $n=0$ et $z\in\Omega_0$, on a $I_0(z)=\int_0^1 s^{z-1}\,ds=\left[\frac{s^z}{z}\right]_0^1=\frac{1}{z}=\frac{1!}{(z+0)}$. Donc $(\mathcal{P}_0)$ est vérifiée.

- **Hérédité :** on suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. On se donne $z\in\Omega_0$. On intègre par partie, les fonctions en jeu étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ :

$$\begin{aligned}I_{n+1}(z) \;&=\; \int_0^1(1-s)^{n+1}\,s^{z-1}\,ds\\ &=\; \left[(1-s)^{n+1}\frac{s^z}{z}\right]_0^1+\int_0^1(n+1)(1-s)^n\,\frac{s^z}{z}\,ds\\ &=\; \frac{n+1}{z}\int_0^1(1-s)^n\,s^z\,ds\\ &=\; \frac{n+1}{z}\,I_n(z+1).\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $I_n(z+1) = \dfrac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$. On en déduit

$$\frac{n+1}{z} I_n(z+1) = \frac{(n+1)!}{z\,(z+1)\cdots(z+n+1)}.$$

Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Ceci conclut la récurrence.

On a démontré la formule d'Euler :

$$\forall z \in \Omega_0 \quad \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Et pour tout $z \in \Omega_0$ vérifiant $\Gamma(z) \neq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \cdot n!} \\ &=: G(z). \end{aligned}$$

**Etape 3 : montrons que $G$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $G_n(z) = \dfrac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z \cdot n!}$.

On a alors

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \frac{z}{(n+1)^z} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z+k}{k} \\ &= z \cdot \exp(-z\log(n+1)) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) \\ &= z \cdot \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-z\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) \\ &= z \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(z), \end{aligned}$$

où les fonctions $\varphi_k$ définies par $\varphi_k(z) := \left(1+\frac{z}{k}\right)\exp\left(-z\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Soit $R>0$ et $|z|<R$. Pour $k \geq R$, on a $\dfrac{|z|}{k} < 1$ donc $1+\dfrac{z}{k}$ est non nul. On peut alors écrire

$$\varphi_k(z) = \exp\left[\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].$$

On en déduit que

$$G_n(z) = z\prod_{k=1}^{\lfloor R\rfloor} \varphi_k(z) \times \exp\left[\sum_{k=\lfloor R\rfloor+1}^{n} \log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].$$

Par ailleurs, on a lorsque $k \to +\infty$ :

$$\begin{aligned} \log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \frac{z}{k} - \frac{z^2}{2k^2} - \frac{z}{k} + \frac{z}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{z(1-z)}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Donc par définition de la notation $o(\cdot)$, pour $k$ assez grand, on a

$$\begin{aligned}\left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| &\leq \frac{|z(1-z)|}{2\,k^2}\\ &\leq \frac{R\,(1+R)}{2k^2}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=\lfloor R\rfloor+1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ converge normalement sur $\{|z|<R\}$, donc uniformément sur tout compact de $\{|z|<R\}$, vers une fonction holomorphe.

On en déduit qu'il en est de même de la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme $R$ est arbitraire, pour tout $z\in\mathbb{C}$, il existe $R>0$ tel que $|z|\leq R$ et le compact $\{|z|\leq R\}$ est inclu dans $\{|z|<R+1\}$, par exemple.

Donc $G=\lim\limits_{n\to+\infty} G_n$ est holomorphe en tout point $z\in\mathbb{C}$ : c'est une fonction entière.

**Etape 4 : conclusion**

Comme $G(z)=z\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\varphi_k(z)$ et que le produit convergent $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\varphi_k$ a pour zéros les zéros des $\varphi_k$, c'est-à-dire $-1,-2,\ldots$. On en déduit que $F=\dfrac{1}{G}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ et non nulle sur cet ensemble. La formule d'Euler donne alors

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-\quad \frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}=F(z).$$

Ceci conclut la preuve. $\square$