P. Maurer

ENS Rennes

Référence : Rauch, Partial differential equations.

Fortement inspiré du travail de Corentin Kilque.

Recasage : *222, 250*.

Equation de Schrödinger sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$

Définition 1. *On rappelle que l'espace de Schwartz sur* $\mathbb{R}$ *est défini par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,:\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)\,| < \infty \right\}.$$

Théorème 2. *Pour* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, on a* $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*. De plus,* f *vérifie la formule d'inversion de Fourier :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Théorème 3. *Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*. Alors il existe une unique fonction* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ *telle que*

1. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x,0) = f(x)$,
3. *Si* $g_t\colon x \mapsto u(x,t)$*, alors*

$$\forall T > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad M^T_{\alpha,\beta} := \sup_{|t| < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha\, g_t^{(\beta)}(x) \right| < \infty.$$

De plus, on connait explicitement la solution u*, qui est donnée par*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi^2 t}\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Démonstration.

On raisonne par analyse-synthèse.

Etape 1 : Analyse.

Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie 1, 2 et 3. Pour $t \in \mathbb{R}$, la condition 3 donne en particulier que $g_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut considérer sa transformée de Fourier $\hat{g_t}$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{g_t}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

Fixons $\xi \in \mathbb{R}$, et donnons nous $T > 0$. On souhaite appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale à la fonction $t \mapsto \hat{g_t}(\xi)$ pour $t \in [-T, T]$. Notons $v_\xi(x,t) := u(x,t)\, e^{-ix\xi}$.

- Pour $t \in [-T, T]$ fixé, la fonction $x \mapsto v_\xi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $g_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $t\mapsto v_\xi(x,t)$ est dérivable et vérifie

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \frac{\partial v_\xi(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,e^{-ix\xi}.$$

- Pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[-T,T]$, on a la domination :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial v_\xi(x,t)}{\partial t}\right| &= \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,e^{-ix\xi}\right|\\
&= \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|\\
&= \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \quad \text{(d'après 1)}\\
&= \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\cdot\frac{1+x^2}{1+x^2}\right|\\
&\leq \left|\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)}{1+x^2}\right|+\left|\frac{x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)}{1+x^2}\right|\\
&\leq \frac{M_{1,2}^T+M_{2,2}^T}{1+x^2}\in L^1(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Le théorème de dérivation sous l'intégrale assure alors que pour tout $t\in[-T,T]$, $t\mapsto\hat{g}_t(\xi)$ est dérivable et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\hat{g}_t(\xi)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,e^{-ix\xi}\,dx.\\
&= i\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,e^{-ix\xi}\,dx.
\end{aligned}$$

Comme T est arbitraire, cela en fait vrai pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Les fonctions $x\mapsto u(x,t)$ et $x\mapsto e^{-ix\xi}$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer deux fois par parties l'égalité précédente. Il vient alors

$$\frac{\partial\,\hat{g}_t(\xi)}{\partial t} = -i\xi^2\,\hat{g}_t(\xi).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à ξ fixé, donc il existe $A(\xi)\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on ait

$$\hat{g}_t(\xi) = A(\xi)\,e^{-i\xi^2 t}.$$

Or, pour $\xi\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{g}_0(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,e^{-ix\xi}\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ix\xi}\,dx\\
&= \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Et d'autre part, $\hat{g}_0(\xi)=A(\xi)$. On en déduit que $A(\xi)=\hat{f}(\xi)$. Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé. Puisque $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en va de même de la fonction $\xi\mapsto\hat{g}_t(\xi)=\hat{f}(\xi)\;e^{-i\xi^2 t}$. On peut donc lui appliquer la formule d'inversion de Fourier, et il vient

$$g_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)\,e^{-i\xi^2 t}\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Puisque $g_t(x) = u(t,x)$, on en déduit l'unicité de la solution.

Etape 2 : Synthèse.

On considère la fonction

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi^2 t}\, e^{ix\xi}\, d\xi,$$

définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale aux fonctions $x \mapsto u(x,t)$ et $t \mapsto u(x,t)$, on montre que u admet des dérivées partielles d'ordre deux en ses deux variables, qui sont toutes continues. Aussi, on a bien $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Par ailleurs, le même argument montre que $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x}(x,t)$, donc u vérifie 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $u(x,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = f(x)$ d'après la formule d'inversion de Fourier, donc u vérifie 2.

Il reste à montrer que u vérifie le point 3 pour conclure la preuve. Commençons par remarquer qu'en appliquant encore le théorème de dérivation sous l'intégrale à $g_t\colon x \mapsto u(x,t)$, on peut en fait montrer que $g_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et que ses dérivées partielles d'ordre $\beta \in \mathbb{N}$ vérifient

$$\frac{\partial^\beta g_t}{\partial x^\beta}(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (i)^\beta \xi^\beta\, \hat{f}(\xi)\; e^{-i\xi^2 t}\, e^{ix\xi}\, d\xi\,.$$

Ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} x^\alpha \frac{\partial^\beta g_t}{\partial x^\beta}(x,t) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i^\beta x^\alpha\, \xi^\beta\, \hat{f}(\xi)\; e^{-i\xi^2 t}\, e^{ix\xi}\, d\xi \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha}(i^\beta\, \xi^{\,\beta}\, \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi^2 t})\, i^\alpha\, e^{ix\xi}\, d\xi, \end{aligned}$$

où on a intégré α fois par parties, les fonctions $\xi \mapsto i^\alpha\, e^{i\xi x}$ et $\xi \mapsto i^\beta\, \xi^\beta\, \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t}$ étant de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

La formule de Leibniz donne alors

$$x^\alpha \frac{\partial^\beta g_t}{\partial x^\beta}(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} i^{\beta+\alpha}\, \frac{\partial^k \xi^{\,\beta}\, \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^k} \cdot \frac{\partial^{\alpha-k}\, e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}}\, e^{ix\xi} d\xi.$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| x^\alpha \frac{\partial^\beta g_t}{\partial x^\beta}(x,t) \right| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k \xi^{\,\beta}\, \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^{\alpha-k}\, e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}} \right| d\xi.$$

Remarquons que la quantité $\dfrac{\partial^{\alpha-k}\, e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}}$ s'exprime comme un polynôme en t et en ξ multiplié par $e^{-i\xi^2 t}$ (cela se montre par récurrence). Comme $|e^{-i\xi^2 t}| = 1$, il existe donc $P \in \mathbb{R}[X,X]$ tel que

$$\left| \frac{\partial^{\alpha-k}\, e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}} \right| \leq P(|t|, |\xi|).$$

Par ailleurs, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc en particulier, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k \xi^{\beta} \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^k} \right| P(|t|, |\xi|)\,(1+|\xi|^2) < \infty$. Il s'en suit que

$$\left| \frac{\partial^k \xi^{\beta} \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^{\alpha-k} e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}} \right| = o\left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right),$$

et donc $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k \xi^{\beta} \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^{\alpha-k} e^{-i\xi^2 t}}{\partial \xi^{\alpha-k}} \right| d\xi < \infty$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit que u vérifie la condition 3. $\square$