P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : 152, 215.

Référence : Rouvière, Petit guide du calcul différentiel

Différentielle du déterminant

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier plus grand que 1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A.

On se donne une norme $\|.\|$ quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes), par exemple la norme d'opérateur. Toutes les convergences évoquées seront pour cette norme.

Définition 1. *(Rappel)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On appelle comatrice de* A*, et on note* $\mathrm{Com}(A)$*, la matrice dont les coefficients sont donnés par* $(\mathrm{Com}\,A)_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$*, où* $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ *est obtenue en supprimant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colone de* A*.*

Proposition 2. *(Rappel)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, alors :*

$$A \cdot \mathrm{Com}(A)^T = \det(A) \cdot I_n$$

Lemme 3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Démonstration.

- D'une part, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(P) \neq 0\}$, et $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (parceque polynomiale), donc c'est bien un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Par ailleurs, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de M (éventuellement non deux à deux distinctes). On choisit une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ de réels tous distincts des λ_i, et qui converge vers zéro (si les λ_i sont tous non réels, $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ convient, et sinon, $\varepsilon_n = \dfrac{\min\{\lambda_i : i \in [\![1, n]\!] \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R}\}}{2n}$ convient).

  On note alors $P_k = M - \varepsilon_k I_n$. Comme M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = QTQ^{-1}$, où T est triangulaire supérieure, de diagonale égale à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

  On en déduit que $P_k = QTQ^{-1} - \varepsilon_k Q I_n Q^{-1} = Q(T - \varepsilon_k I_n)\,Q^{-1}$, d'où :

$$\det(P_k) = \det(T - \varepsilon_k) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0.$$

  Ainsi, $P_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et de plus, $\|P_k - M\| = \|\varepsilon_k I_n\| \leq |\varepsilon_k| \cdot \|I_n\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(P_k)_{k\geq 0}$ converge vers M.

On en déduit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème 4. *On considère la fonction* $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*. Pour tout* $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a la formule suivante :*

$$D\det(X)\cdot H = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(X)^T H)$$

où $\mathrm{Com}(X)^T$ *désigne la transposée de la comatrice de* M*, définie par :*

Démonstration.

- **Etape 1 : calcul de $D\det(I_n)$.**

  L'application det est de classe $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^\infty$), car elle est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour déterminer sa différentielle en I_n, il suffit donc de calculer sa dérivée en toute direction.

  Soit $t \in \mathbb{R}$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En modifiant légèrement le calcul fait plus haut, si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M, alors les valeurs propres de $I_n + tH$ sont $1 + t\lambda_1, \ldots, 1 + t\lambda_n$.

  On calcule alors :

  $$\begin{aligned} \det(I_n + tH) &= \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i + \underset{t\to 0}{o}(t) \\ &= 1 + t\,\mathrm{Tr}(H) + \underset{t\to 0}{o}(t) \end{aligned}$$

  On en déduit que $D_H \det(I_n) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\det(I_n + tH) - 1}{t} = \mathrm{Tr}(H)$. Puisque la différentielle de det en I_n vérifie $D_H \det(I_n) = D\det(I_n)\cdot H$, on en déduit que $D\det(I_n)\cdot H = \mathrm{Tr}(H)$.

- **Etape 2 : calcul de $D\det(P)$ lorsque P est inversible.**

  Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule :

  $$\begin{aligned} \det(P + H) &= \det(P(I_n + P^{-1}H)) \\ &= \det(P)\det(I_n + P^{-1}H) \\ &= \det(P)\,(1 + \mathrm{Tr}(P^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(P) + \mathrm{Tr}(\det(P)P^{-1}H) + o(\|H\|) \\ &= \det(P) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(P)^T H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

  La définition de la différentielle nous permet d'en déduire que $D\det(P)\cdot H = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(P)^T H)$.

- **Etape 3 : cas général.**

  L'application $M \mapsto \mathrm{Com}(M)^T$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f\colon M \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T)$ l'est également. Par ailleurs, $g\colon M \mapsto D\det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Comme f et g coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit la formule souhaitée pour toute matrice réelle.

$\square$

Application 5. Soit $y_1, \ldots, y_n$ des solutions à valeur dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $y'(t) = A(t)\, y(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) := \det(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ leur déterminant wronskien. Alors $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, w(t)$.

De plus, si A est indépendante de t, on a $\det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Tr}(A)}$.

Démonstration. Notons $Y(t)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colones sont $y_1(t), \ldots y_n(t)$. Alors le déterminant wronskien $w(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned} w'(t) &= D\det(Y(t)) \cdot Y'(t) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(Y(t))^T Y'(t)) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(Y(t))^T A(t)\, Y(t)) \\ &= \mathrm{Tr}(A(t) \det(Y(t))\,) \\ &= w(t)\, \mathrm{Tr}(A(t)). \end{aligned}$$

On a donc $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, w(t)$. Par conséquent :

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\, ds \right). \quad (\star)$$

Si de plus $A(t)$ est constante par rapport à t, alors le système initial s'écrit :

$$Y'(t) = A\, Y(t).$$

Ceci donne $Y(t) = Y(0)\, e^{tA}$, et en prenant le déterminant, il vient $w(t) = w(0) \det(e^{tA})$.

Par ailleurs, la formule $(\star)$ s'écrit elle-même :

$$w(t) = w(0) \exp(t\, \mathrm{Tr}(A))$$

On en déduit l'égalité souhaitée lorsque $w(0) \neq 0$, ce qui a lieu dès que $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ est libre. $\square$