P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : *207, 213, 239*.

Référence : Objectif Agrégation.

Densité des polynômes orthogonaux

Définition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application ρ: $I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx \ < \infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 2. *$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, \rho(x)\, dx$$

Proposition 3. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle ., . \rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n) = n$. Elle s'appelle la famille de polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.*

Proposition 4. *Soit ρ une fonction de poids. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \in L^1(I, \rho)$. Alors pour tout $p \in [1, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \in L^p(I, \rho)$*

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. On utilise l'inégalité de Hölder avec $p' = \frac{1}{p}$ et $q' = \frac{1}{1-p}$:

$$\begin{aligned} \int_I |x|^{np} \rho(x)\, dx &= \int_I |x^{np}|\, \rho^p(x)\, \rho^{1-p}(x)\, dx \\ &\leq \left(\int_I |x^n|\, \rho(x)\, dx\right)^p \left(\int_I \rho(x)^{(1-p)\times\frac{1}{1-p}}\, dx\right)^{1-p} \\ &= \left(\int_I |x^n|\, \rho(x)\, dx\right)^p \left(\int_I \rho(x)\, dx\right)^{1-p} \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\int_I |x^n|\, \rho(x)\, dx < \infty$ et $\int_I \rho(x)\, dx = \int_I |x|^0\, \rho(x)\, dx < \infty$, donc :

$$x_n \in L^p(I, \rho) \qquad \square$$

Théorème 5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\,\rho(x)\,dx \;<\; \infty$$

Alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Démonstration.

- Il est clair que les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée de $L^2(I,\rho)$ par construction. On va montrer que cette famille est dense dans $L^2(I,\rho)$.

- Pour cela, d'après le critère de densité, il suffit de montrer que $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$.

  Soit $f \in \{P_n : n\in\mathbb{N}\}^{\perp}$. Comme P_n est de degré n, on obtient par une récurrence immédiate sur n que $\langle f, M_n\rangle = 0$, où M_n désigne le monôme de degré n.

  On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \int_I f(t)\,t^n\,\rho(t) \;=\; 0. \qquad (1)$$

- On définit alors la fonction φ suivante :

$$\varphi\colon\begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{C} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} f(x)\,\rho(x) \text{ si } x\in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

  Vérifions que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx \;=\; \int_I |f(x)|\,\sqrt{\rho(x)}\cdot\sqrt{\rho(x)}\,dx.$$

  L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx \;\leq\; \left(\int_I |f(x)|^2\,\rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

  Par hypothèse, $f\in L^2(I,\rho)$ donc $\int_I |f(x)|^2\,\rho(x)dx < \infty$, et $\int_I \rho(x)\,dx = \int_I |x|^0\,\rho(x)\,dx < \infty$. Ainsi, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, et on peut considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \hat{\varphi}(x) = \int_I \varphi(t)\,e^{-ixt}\,dt.$$

- On va vérifier que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_\alpha = \left\{|\mathrm{Im}| < \frac{\alpha}{2}\right\}$.

  En effet, pour tout $t\in I$, $z\mapsto \varphi(t)\,e^{-izt}\rho(t)\,dt$ est holomorphe par holomorphie de $z\mapsto e^{-izt}$, et de plus, pour tout $z\in B_\alpha$, $t\mapsto \varphi(t)\,e^{-izt}\,\rho(t)$ est mesurable et on a :

$$|\varphi(t)\,e^{-izt}| \;=\; e^{t\mathrm{Im}(z)}|f(t)|\,\rho(t) \;\leq\; e^{\alpha|t|/2}\,|f(t)|\,\rho(t)$$

  On applique l'inégalité de Cauchy-Swcharz :

$$\int_I e^{\alpha/2\,|t|}\,|f(t)|\,\big(\sqrt{\rho(t)}\,\big)^2 \leq \left(\int_I |f(t)|^2\,\rho(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_I e^{\alpha|t|}\,\rho(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

On obtient donc $e^{\alpha|t|/2}|f(t)|\,\rho(t)\in L^1(\mathbb{R})$, en utilisant l'hypothèse sur la fonction de poids ρ.

Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale assure que $F\colon z\mapsto \int_I \varphi(t)\,e^{-izt}\,dt$ est une application holomorphe sur B_α.

- On va montrer que F est nulle sur B_α. Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale assure que l'on peut dériver n fois sous le signe intégrale.

  Pour tout $z\in B_\alpha$ et $t\in I$, on a $\dfrac{\partial^n(\varphi(t)\,e^{-izt})}{\partial z^n}=\dfrac{\partial^n(f(t)\rho(t)\,e^{-izt})}{\partial z^n}=(-i)^n\,t^n\,f(t)\,\rho(t)\,e^{-izt}$.
  Donc $F^{(n)}(z)=\int_I (-i)^n\,t^n\,f(t)\,\rho(t)\,e^{-izt}$. En particulier, on a donc :

  $$\begin{array}{rcl} F^{(n)}(0) & = & (-i)^n \int_I t^n\,f(t)\,\rho(t)\,dt \\ & = & 0 \quad \text{d'après (1).} \end{array}$$

  Donc F s'annule localement autour de zéro (son développement en série entière au voisinage de zéro est nul), et B_α étant connexe, le théorème de prolongement analytique montre que $F=0$ sur B_α.

- Finalement, on a donc $\hat{\varphi}=0$ sur $\mathbb{R}$, et φ étant intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier montre que $\varphi=0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f=0$ sur I. On a donc bien $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}^\perp=\{0\}$, et ceci conclut la preuve.

$\square$

Remarque 6. On considère, sur $I=]0,+\infty[$, la fonction de poids $w(x)=x^{-\ln(x)}$. Alors les polynômes orthogonaux pour le poids w ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I,w)$.

En effet, la fonction f définie sur I par $f(x)=\sin(2\pi\ln(x))$ est orthogonale à tous les monômes $x\mapsto x^n$, donc la famille $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale dans $L^2(I,w)$, et il en va donc de même pour la famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids.

Ceci illustre l'importance de la décroissance exponentielle de ρ dans le théorème 5.