P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : 105, 106, 150.

Référence : FGN, Oraux X-ENS, Algèbre 1

Décomposition de Bruhat

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps, n un entier non nul. On commence par quelques rappels.

Définition 1. *On appelle drapeau de $\mathbb{K}^n$ toute suite $(0=F_0\subset\cdots\subset F_n)$ de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ telles que les inclusions soient strictes. Si de plus $\dim(F_i)=i$, on dit que le drapeau est complet. On note* Drap *l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{K}^n$.*

Notation 2. *On appelle drapeau complet canonique le drapeau $C:=\{0\}\subset\mathrm{Vect}(e_1)\subset\cdots\subset\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$, où $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Définition 3. *On note $B_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inversibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 4. *$B_n(\mathbb{K})$ est le stabilisateur de C pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur* Drap. *En particulier, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $B\in B_n(\mathbb{K})$, et $j\in[\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} Be_j &= \sum_{i=1}^n b_{ij}e_i \\ &= \sum_{i=1}^j b_{ij}e_i\in\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_j)\end{aligned}$$

Par conséquent, $B\left(\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_j)\right)\subset\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_j)$. Comme B est inversible, il y a égalité des dimensions de ces deux sous-espaces, ils sont donc égaux. On en déduit $B(C)=C$ donc B est inclu dans le stabilisateur de C.

Réciproquement, soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A(C)=C$. D'une part, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

D'autre part, comme $A\left(\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_j)\right)\subset\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_j)$, Ae_j s'exprime comme combinaison linéaire de $e_1,\ldots,e_j$ donc il existe $\lambda_{ij}\in\mathbb{K}$ tels que $Ae_j=\sum_{i=1}^j\lambda_{ij}e_i$. On en déduit que :

$$a_{ij}=\lambda_{ij}\quad\text{pour } i\le j\quad\text{et}\quad a_{ij}=0\text{ pour } i>j$$

Donc $A\in B_n(\mathbb{K})$. □

Définition 5. *Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, et $(E_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda)=I_n+\lambda E_{ij}$.

On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)\,E_{ii}$.

Proposition 6. *Pour $i < j$, $T_{ij}(\lambda) \in B_n(\mathbb{K})$ et pour $\alpha \neq 0$, $D_{ij}(\alpha) \in B_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Trivial. □

Remarque 7. Multiplier par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ à gauche (respectivement à droite) revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda\,L_j$ (respectivement sur les colones $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).

Multiplier par une matrice de dilatation $D_i(\alpha)$ à gauche (respectivement à droite) revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha\,L_i$ (respectivement sur les colones $C_i \leftarrow \alpha\,C_i$)

Définition 8. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note w_σ l'application linéaire donnée par $w_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Proposition 9. *L'application $w\colon \sigma \mapsto w_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

On peut maintenant énoncer le théorème principal de ce développement :

Théorème 10. ***(Bruhat)***

En notant, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $B_n(\mathbb{K})\,w_\sigma\,B_n(\mathbb{K}) := \{t\,w_\sigma\,s\ :\ t, s \in B_n(\mathbb{K})\}$, on a la décomposition :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} B_n(\mathbb{K})\,w_\sigma\,B_n(\mathbb{K})$$

Démonstration.

$\boxed{\exists}$ Soit $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que l'on peut partir de P et se ramener à une matrice de permutation w_σ en faisant des opération sur les lignes et sur les colones choisies pour que les matrices de transvection et dilatation associées soient bien dans $B_n(\mathbb{K})$.

- Comme P est inversible, sa première colone contient au moins un coefficient non nul : on note alors $\alpha_1 = \max\{i \in [\![1, n]\!]\ :\ p_{i1} \neq 0\}$.

  On fait alors les opérations sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \dfrac{p_{i1}}{p_{\alpha_1 1}} L_{\alpha_1}$ pour tout $i < \alpha_1$, de manière à rendre tous les coefficients de la première colone nuls sauf celui de la $\alpha_1^{\text{ème}}$ ligne.

  On effectue ensuite l'opération $C_1 \leftarrow \dfrac{1}{p_{\alpha_1 1}} C_1$ de manière à rendre le coefficient $p_{\alpha_1 1}$ égal à 1.

  Enfin, on rend tous les coefficients de la $\alpha_1^{\text{ème}}$ ligne nuls sauf le premier, en faisant les opérations sur les colones $C_i \leftarrow C_i + p_{\alpha_1 i}\,C_1$ pour tout $i > 1$.

  Ces opérations permettent de se ramener à une matrice de la forme suivante :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & (*) & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (*) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- On a encore $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc sa deuxième colone n'est pas nulle. En notant de la même manière $\alpha_2 = \max\{i \in [\![1,n]\!] : p_{i2} \neq 0\}$, on a nécessairement $\alpha_2 \neq \alpha_1$ puisque $p_{\alpha_1 2} = 0$.

  On peut ensuite effectuer des opérations sur les lignes et les colones de P_1 pour mettre des zéros sur la deuxième colone, la $\alpha_2^{\text{ème}}$ ligne, et mettre le coefficient $p_{\alpha_2,2} = 1$. On remarque que ces opérations ne modifient pas la première colone ni la $\alpha_1^{\text{ème}}$ ligne.

- En répétant ainsi les opérations des étapes un et deux, on obtient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tous distincts dans $[\![1,n]\!]$ et une matrice $P_n = w_\sigma$ où la permutation σ est donnée par $\sigma(k) = \alpha_k$.

  De plus, les opérations effectuée sont équivalentes à la multiplication à gauche et à droite par des matrices de transvection et de dilatations du type $T_{ij}(\lambda)$ avec $i < j$ et $D_i(\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ qui sont donc des éléments du sous-groupe $B_n(\mathbb{K})$.

  On a donc, pour $T_1, T_2 \in B_n(\mathbb{K})$, l'égalité $P = T_1\, w_\sigma\, T_2$, ce qui montre l'existence de la décomposition de Bruhat.

$\boxed{!}$ On suppose qu'il existe $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ et T_1, T_2, T_1', T_2' tels que $P = T_1\, w_\sigma\, T_2 = T_1'\, w_\tau\, T_2'$.

On a alors $T_1'^{-1} T_1 w_\sigma = w_\tau T_2' T_2^{-1}$. En posant $S = T_1'^{-1} T_1$ et $Q = T_2' T_2^{-1}$, on a :

$$Q = w_{\tau^{-1}}\, S w_{\,\sigma}$$

Supposons par l'absurde que $\sigma \neq \tau$. Il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) < \tau(i)$. On a alors :

$$S(i,i) = Q(\tau(i), \sigma(i)) = 0 \text{ car } Q \in B_n(\mathbb{K})$$

Ceci contredit que $S \in B_n(\mathbb{K})$ (puisque S est triangulaire supérieure et inversible, ses coefficients diagonaux doivent être tous non nuls).

Ainsi, $\sigma = \tau$ donc la décomposition est unique. □

Corollaire 11. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *agit sur* $\mathrm{Drap} \times \mathrm{Drap}$ *et l'action possède* $n!$ *orbites.*

Démonstration. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur Drap. On a vu que le stabilisateur pour cette action est $B_n(\mathbb{K})$, donc on a $\mathrm{Drap} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / B_n(\mathbb{K})$.

Soit $(\overline{A}, \overline{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / B_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / B_n(\mathbb{K})$. D'après le théorème de décomposition de Bruhat, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $B_1, B_2 \in B_n(\mathbb{K})$ tels que $A^{-1}B = B_1\, w_\sigma\, B_2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\overline{A}, \overline{B}) &= A \cdot (\overline{I_n}, \overline{A^{-1}B}) \\
&= A \cdot (\overline{I_n}, \overline{B_1\, w_\sigma\, B_2}) \\
&= A B_1\, (\overline{B_1^{-1}}, \overline{w_\sigma\, B_2}) \\
&= A B_1\, (\overline{I_n}, \overline{w_\sigma}) \quad \text{car } B_1^{-1}, B_2 \in B_n(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Donc chaque orbite contient un élément de la forme $(\overline{I_n}, \overline{w_\sigma})$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\tau, \sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $(\overline{I_n}, \overline{w_\sigma})$ et $(\overline{I_n}, \overline{w_\tau})$ soient dans la même orbite. Dans ce cas, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A\,\overline{I_n} = \overline{I_n}$ et $A\,\overline{w_\sigma} = \overline{w_\tau}$, donc on a $A \in B_n(\mathbb{K})$ et $A w_\sigma = w_\tau B$ pour un certain $B \in B_n(\mathbb{K})$. D'après l'unicité de la décomposition de Bruhat, $\sigma = \tau$.

On en déduit que chaque orbite contient exactement un élément de la forme $(\overline{I_n}, \overline{w_\sigma})$, donc le nombre d'orbite est $|\mathcal{S}_n| = n!$. □

Référence

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*, Cassini, p. 349.