P. Maurer

ENS Rennes

Recasages : 209, 223.

Référence : Stein & Shakarchi, Fourier Analysis.

Critère d'équirépartition de Weyl

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0,1[$ à valeurs réelles. On rappelle que $\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$.

Définition 1. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1[$ est équirépartie si pour tout intervalle ouvert $]a,b[\subset[0,1[$, on a*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in]a,b[\}}{N} = b-a.$$

Cela signifie que pour N assez grand, la proportion d'éléments x_n dans $]a,b[$ pour $1\leq n\leq N$, s'approche du quotient de la longueur de l'intervalle $]a,b[$ par la longueur de l'intervalle $[0,1[$.

Proposition 2.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1[^{\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $(a,b)\in[0,1[^2$ tels que $a<b$, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{[a,b[}(x_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1\mathbf{1}_{[a,b[}(x)\,dx.$$

Démonstration. On a les inégalités suivantes :

$$\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in]a,b[\}\leq \mathrm{Card}\,\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in[a,b[\}\leq \mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in]a,b[\}+1,$$

et

$$\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in[a,b[\}-1\leq \mathrm{Card}\,\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in]a,b[\}\leq \mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in[a,b[\}.$$

Le théorème d'encadrement justifie alors que

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in]a,b[\}}{N} = \lim_{N\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in[a,b[\}}{N}.$$

La proposition résulte alors de la reformulation immédiate $\mathrm{Card}\{1\leq n\leq N\,:\,x_n\in[a,b[\} = \sum_{n=1}^N\mathbf{1}_{[a,b[}(x_n)$ et $\int_0^1\mathbf{1}_{[a,b[}(x)\,dx=\int_a^b dx=b-a$. □

Théorème 3. *(Critère de Weyl)*

On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1[$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2i\pi kx_n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie. On va démontrer que pour toute fonction continue $f\colon[0,1]\to\mathbb{C}$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)=\int_0^1 f(x)\,dx$. Ceci implique le résultat souhaité puisque les fonctions $x\mapsto e^{2i\pi kx}$ sont continues pour tout $k\neq 0$ et vérifient $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi kx}\,dx=\left[\frac{e^{2i\pi kx}}{2i\pi k}\right]_0^1=0$.

Pour ce faire, montrons que le résultat est vrai pour une fonction en escalier. Soit $f\in\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$ et $\sigma=(s_0=0<s_1<\cdots<s_{m-1}<s_m=1)$ une subdivision adaptée de $[0,1[$, de sorte que f s'écrive :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} f(s_k)\,\mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}(x).$$

D'après la proposition **2**, pour tout $k\in[\![0,m-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}(x_n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1\mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}(x)\,dx.$$

Par linéarité de la somme et de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1} f(s_k)\,\mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}(x_n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1\sum_{k=0}^{m-1} f(s_k)\,\mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}(x)\,dx.$$

Ce résultat est valable pour toute fonction $f\in\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$.

On se donne une fonction $f\in\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$, et $\varepsilon>0$. Comme $\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$, il existe $\varphi\in\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty\leq\varepsilon/3$.

Posons, pour $N\geq 1$, $\displaystyle\mathcal{M}_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)-\int_0^1 f(x)\,dx$.

L'objectif est donc de montrer que pour N assez grand, on a $|\mathcal{M}_N(f)|\leq\varepsilon$. On calcule alors

$$\mathcal{M}_N(f) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(x_n)-\int_0^1\varphi(x)\,dx+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f-\varphi)(x_n)-\int_0^1(f-\varphi)(x)\,dx$$

On en déduit, par inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_N(f)| &\leq |\mathcal{M}_N(\varphi)|+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f-\varphi|(x_n)+\int_0^1|f-\varphi|(x)\,dx\\ &\leq |\mathcal{M}_N(\varphi)|+\frac{2}{3}\varepsilon.\end{aligned}$$

D'après ce que l'on a montré, comme $\varphi\in\mathcal{E}([0,1[,\mathbb{R})$, on a $|\mathcal{M}_N(\varphi)|\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc il existe $N_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N\geq N_0$, on ait $|\mathcal{M}_N(\varphi)|\leq\varepsilon/3$. On en déduit que pour tout $N\geq N_0$,

$$|\mathcal{M}_N(f)| \;\leq\; \varepsilon.$$

Ceci conclut la preuve pour $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Par ailleurs, si $f\in\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{C})$, on peut écrire $f=\mathrm{Re}\,f+i\mathrm{Im}(f)$ avec $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ continues à valeurs réelles, donc la linéarité de l'intégrale assure que la propriété est encore vraie pour $f\in\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{C})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k x_n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On va d'abord chercher également à montrer que $|\mathcal{M}_N(f)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{C})$. Par linéarité de la somme et de l'intégrale, on a $|\mathcal{M}_N(P)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout polynôme trigonométrique P de la forme

$$P(x) := \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{2ik\pi x} \quad \text{avec} \quad (a_{-m}, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{2m+1}.$$

Le théorème de Féjer affirme que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{C})$, alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques (autrement dit, les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{C})$).

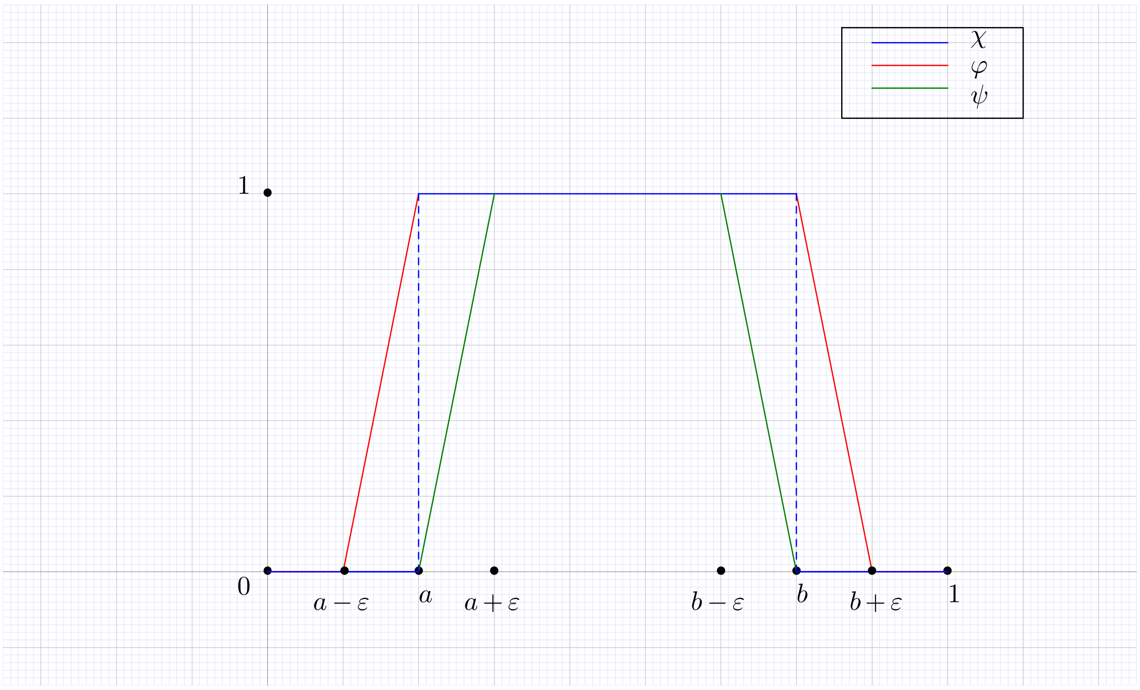
On en déduit donc comme dans le sens direct que $|\mathcal{M}_N(f)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

Soit $(a,b) \in [0,1[^2$, avec $a < b$. On note $\chi := \mathbf{1}_{[a,b[}$, et on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$ telles que $0 \leq \varphi \leq \chi \leq \psi \leq 1$ sur $[0,1[$, et

$$\int_0^1 (\chi - \varphi)(x)\,dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\psi - \chi)(x)\,dx \leq \varepsilon, \qquad (\star)$$

en choisissant par exemple φ et ψ comme dans le dessin ci-dessous.



On a alors, pour $N \geq 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \chi(x) \leq \psi(x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi(x_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n)$$

Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$, il vient

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \leq \int_0^1 \psi(x)\,dx.$$

D'après $(\star)$, ceci implique donc :

$$\int_0^1 \chi(x)dx - \varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \leq \int_0^1 \chi(x)\,dx + \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, d'où :

$$\int_0^1 \chi(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n) \leq \int_0^1 \chi(x)\,dx.$$

Donc toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi(x_n)\right)_{N\geq 1}$ converge, et sa limite vaut bien $\int_0^1 \chi(x)\,dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b[}(x)\,dx$ comme souhaité.

$\square$

Exemple 4. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels est équirépartie modulo 1 lorsque la suite $(x_n - \lfloor x_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

Le théorème de Weyl permet alors de montrer très facilement que pour $\gamma > 0$, la suite $(n\gamma)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si γ est irrationnel.