P. Maurer
Lycée Stanislas

Août 2023

Pré-rentrée ECG 2ème année

Mathématiques - éléments de corrigé

Analyse

1 Suites numériques, étude de fonctions

Exercice 1

1. D'après les propriétés de cours sur la partie entière, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{nx-1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n}$, d'où

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} x = x$, le théorème d'existence d'une limite par encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

2. Comme $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$, on a $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n}{2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, par théorème d'existence d'une limite par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = +\infty$.

3. Rappelons que la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 = 1$, et $\sin(\arcsin(x)) = x$ sur $[-1, 1]$, donc $\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2$. Les deux quantités étant positives, on peut appliquer la fonction racine carée et obtenir $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$. Par ailleurs, $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et cos est positive sur cet intervalle, donc $|\cos(\arcsin(x))| = \cos(\arcsin(x))$, ce qui conclut la preuve.

4. La fonction sin est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$. D'après le théorème de la bijection, on sait que sa fonction réciproque arcsin est également continue de $[-1, 1]$ vers $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'autre part, d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, comme sin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que sa dérivée cos ne s'y annule pas, on en déduit que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[= \sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$, et que sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ d'après } \mathbf{3}. \end{aligned}$$

5. (a). Comme $\sqrt{\cdot}:[0,1]\to[0,1]\subset[-1,1]$, la fonction G est bien définie sur $[0,1]$. Elle y est continue en tant que composée de deux fonctions continues.

D'autre part, $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0,1[$ et $\sqrt{\cdot}(]0,1[)\subset]0,1[\subset]-1,1[$ donc G est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de deux fonctions dérivables. Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x\in]0,1[\quad G'(x) &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\end{aligned}$$

car x et $1-x$ sont strictement positifs sur $]0,1[$.

(b). Comme g est strictement positive sur $]0,1[$, G est strictement croissante sur $[0,1]$. D'autre part, on a $G(0)=0$, $G(1)=\pi$ et $G\left(\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

On a $\lim\limits_{x\to0^+}G'(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}G'(x)=+\infty$ donc G admet des tangentes verticales au voisinnage de 0 et de 1. Finalement, on peut calculer l'équation de la tangente en $\frac{1}{2}$, qui vaut

$$\begin{aligned}y &= g\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+G\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 2x+\frac{\pi}{2}-1.\end{aligned}$$

Ces informations permettent de tracer avec une précision suffisante le graphe de G.

Exercice 2

1. D'une part, il est clair que $u_n>0$ et $v_n>0$ pour tout $n\geq0$ (car $a,b>0$ puis par récurrence immédiate sur $n\in\mathbb{N}$). Ceci assure en particulier que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. On va démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{xy}\ \leq\ \frac{x+y}{2}.$$

Par récurrence immédiate sur $n\geq1$, on en déduit que $u_n\geq v_n$ pour tout $n\geq1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}\leq0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même, on a $v_{n+1}-v_n=\sqrt{u_n\,v_n}-\sqrt{v_n^2}=\sqrt{v_n}(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})\geq0$ par croissance de la fonction racine carrée. Il s'en suit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Il reste a démontrer que $u_n-v_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Pour cela, on majore :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-v_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_n\,v_n}\\ &= \frac{u_n-v_n+2\sqrt{v_n\,(v_n-u_n)}}{2}\\ &\leq \frac{u_n-v_n}{2}\ \text{car } v_n-u_n\leq0.\end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, il s'en suit que $0\leq u_n-v_n\leq\dfrac{a-b}{2^n}$. Le théorème d'encadrement assure alors le résultat souhaité.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une unique limite $M(a,b)\geq0$, appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

2. Par récurrence immédiate, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, ce qui justifie en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

On écrit

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - \alpha &= \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{u_n^2} \right) - \alpha \\ &= \frac{1}{4}\left| u_n^2 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{u_n^2} \right| \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{\alpha}{u_n} \right)^2. \end{aligned}$$

En particulier, $u_{n+1}^2 - \alpha \geq 0$ donc $u_n \geq \sqrt{\alpha}$ pour tout $n \geq 1$.

Par ailleurs, l'égalité précédente se ré-écrit, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - \alpha &= \frac{1}{4u_n^2} \cdot (u_n^2 - \alpha)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\alpha} (u_n^2 - \alpha)^2. \end{aligned}$$

Par récurrence sur $n \geq 1$, on en déduit que $u_n^2 - \alpha \leq \dfrac{1}{(4\alpha)^{2n}} (u_1 - \alpha)$. En particulier, $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$ par théorème d'encadrement, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\alpha}$ par unicité de la limite.

Remarque. On pouvait aussi démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par $\sqrt{\alpha}$, et vérifier que si ℓ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{\alpha}{\ell} \right)$ d'où $\ell = \sqrt{\alpha}$.

Exercice 2

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f_n'(x) = -1 - n x^{n-1} < 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n est strictement décroissante. Par ailleurs, $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, d'où l'existence d'une unique solution u_n à l'équation $f_n(x) = 0$ d'après le théorème de la bijection.

2. (a). Le résultat suit de la stricte décroissante de f_n et du fait que $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = -1$.

(b). Par défintion de u_n, on a :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = f_n(u_n) + u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n).$$

Comme $u_n \in]0,1[$, on a $1 - u_n \in]0,1[$ d'où $f_{n+1}(u_n) > 0$. Comme f_{n+1} est elle aussi strictement décroissante, il s'en suit que $u_{n+1} > u_n$, d'où la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée par 1 donc elle converge. Par passage à la limite, l'inégalité $0 < u_n < 1$ implique que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 1$.

(d). Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose par l'absurde $\ell < 1$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n \leq 1 - \varepsilon$ donc $u_n^n \leq (1-\varepsilon)^n$. Il s'en suit, par théorème d'encadrement, que $u_n^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par passage à la limite dans l'identité $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $1 - \ell = 0$, d'où $\ell = 1$, ce qui aboutit à la contradiction souhaitée.

3. (a). On a déjà vu que $v_n = 1 - u_n \in]0,1[$ donc en particulier $v_n > 0$.

Par définition de u_n, on a $f(u_n) = 0$ donc $v_n = u_n^n$. Il s'en suit que $\ln(v_n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 - v_n)$, et comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a l'équivalent usuel $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$ quand $n \to \infty$.

On a donc bien $\ln(v_n) \sim -n v_n$.

(b). Une simple composition de limites associée au résultat de **(a)** assure que $\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Comme $-\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, le résultat est immédiat.

Observons que $\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right) = \ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)$, d'où

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} - \frac{\ln(n)}{-\ln(v_n)} + 1.$$

Par ailleurs, on a $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc par composition, $\frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. L'unicité de la limite permet alors de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{-\ln(v_n)} = 1$, et on en déduit l'équivalence souhaitée.

(c). En utilisant les équivalents de **(a)** et de **(b)**, on déduit que $-n v_n \sim -\ln(n)$, d'où $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

2 Intégration

Exercice 1

A)

1. On a $\int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2} = -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1}-1) = \frac{1-e^{-1}}{2}$.

2. On fait le changement de variable $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x} dx$. Ce changement de variable est légitime puisque $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^2]$[1].

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x + x(\ln(x))^2} dx &= \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{1 + (\ln(x))^2}\left(\frac{1}{x} dx\right)\\ &= \int_0^2 \frac{u}{1+u^2} du\\ &= \frac{1}{2}[\ln(1+u^2)]_0^2\\ &= \frac{\ln(5)}{2}.\end{aligned}$$

3. On fait le changement de variable $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, qui est légitime car $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 3]$.

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx &= \int_1^3 \frac{2}{1+\sqrt{x^2}}\left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2du}{1+u^2}\\ &= 2\arctan(\sqrt{3}) - 2\arctan(1)\\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

1. Rappelons que dans le cas de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, on a pas besoin que la fonction du changement de variable soit bijective. Cette condition est en revanche nécessaire pour effectuer un changement de variable sur une intégrale impropre.

B)

1. Notons que la fonction $t \mapsto \dfrac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue en zéro, donc le problème de convergence se pose uniquement au voisinnage de $+\infty$.

Pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\dfrac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \geq 0$. Par ailleurs, $t^2 \cdot \dfrac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \dfrac{\sqrt{t}^{\,6}}{1+\sqrt{t}^{\,4}} e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparée, donc $\dfrac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, le théorème de comparaison des intégrales à termes positifs permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

Il s'en suit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\, dt$ est également convergente.

2. On présente deux méthodes.

- La fonction $\varphi\colon t \mapsto \ln(\ln(t))$ est continue sur $]1,2]$ donc le problème de convergence se pose uniquement au voisinnage de 1^-.

D'après le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres avec $u = \ln(t)$, $du = \dfrac{1}{t}\, dt$, la fonction $t \mapsto \ln(t)$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,2]$, les intégrales $\displaystyle\int_1^2 \ln(\ln(t))\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^u \ln(u)\, du$ sont de même nature.

Par ailleurs, $e^u \ln(u) \sim \ln(u)$ quand $u \to 0^-$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \ln(u)\, du$ est convergente (en effet, $\ln(u)$ s'intègre en $x\ln(x) - x$ et cette fonction a pour limite 0 qund $x \to 0$).

- Quand $t \to 1$, on a l'équivalent $\ln(t) = \ln(1 + (1-t)) \sim t - 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(\ln(t))}{\ln(t-1)} - 1 &= \frac{\ln(\ln(t)) - \ln(t-1)}{\ln(t-1)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{\ln(t)}{t-1}\right)}{\ln(t-1)} \\
&\underset{t\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\ln(\ln(t)) \sim \ln(t-1)$, et comme ln est intégrable en zéro, il s'en suit que $\int_1^2 \ln(\ln(t))\, dt$ est convergente.

3. L'inégalité classique $|\sin(x)| \leq |x|$ montre que $\left|\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Par théorème de comparaison des intégrales à termes positifs, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ est absolument convergente, donc convergente.

- Pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$, le changement de variable $u = \dfrac{1}{t^2}$, $du = -\dfrac{2}{t^3}\, dt$ assure que cette intégrale est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u) \left(\frac{1}{2u^{3/2}}\, du\right)$, qui est absolument convergente.

- Ou alors, on peut utiliser l'inégalité triviale $\left|\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right| \leq 1$ et ça suffit à conclure puisque 1 est continue donc intégrable sur $[0,1]$.

C)

1. φ est clairement définie sur $]0,\pi[$ car l'intégrale $\int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta$ n'est pas impropre pour $x \in]0,\pi[$.

En effet, pour $x=\pi$, $\varphi(x)$ est une intégrale impropre en π, qui vaut $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{\sin\theta}d\theta$. D'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, cette intégrale est de même nature que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sin(\theta)}d\theta$, or on a $\sin(\theta)\sim\theta$ au voisinnage de zéro donc $\dfrac{1}{\sin(\theta)}\sim\dfrac{1}{\theta}$. L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\theta}d\theta$ est divergente et $\frac{1}{\theta}$ est de signe constant (négatif) sur $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[$ donc par théorème d'équivalent des intégrales à termes de signe constant, on en déduit que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sin(\theta)}d\theta$ diverge, et donc $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{\sin\theta}d\theta$ diverge. De même, on montre que pour $x=0$, $\varphi(x)$ est une intégrale divergente en zéro, donc la fonction n'est pas définie. Pour $x\in]-\infty,0[\cup]\pi,+\infty[$, $\varphi(x)$ n'est pas non plus définie, puisque son expression fait apparaître des intégrales impropres divergentes par relation de Chasles.

2. Avec $u=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{2u}{1+u^2} &= \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\\ &= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\\ &= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sin(\theta).\end{aligned}$$

On en déduit bien $\dfrac{2u}{1+u^2}=\sin(\theta)$.

3. Soit $x\in]0,\pi[$. On fait le changement de variable $u=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $du=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta$ dans l'intégrale $\varphi(x)$, qui est légitime car tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{x}\frac{1}{\sin\theta}d\theta &= \int_{1}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1+u^2}{2u}\times\frac{2}{1+u^2}du\\ &= \int_{1}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{u}du\\ &= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $t\geq 0$, on a $e^{-tx^2}\leq 1$ donc $0\leq\dfrac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\leq\dfrac{1}{1+t^3}$. Comme $1+t^3\sim t^3$ au voisinnage de $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}dt$ est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(-x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t(-x)^2}}{1+t^3}dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-tx^2}}{1+t^3}dt=F(x)$ donc F est paire.

3. (a). La fonction $u \mapsto e^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $u \mapsto -e^{-u}$, qui est bornée par 1 sur $[0,+\infty[$. Supposons par symétrie que $0 \leq a \leq b$.

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur le segment $[a,b]$, on en déduit que :

$$|e^{-a} - e^{-b}| \;\leq\; 1 \cdot |a-b|.$$

(b). Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2} - e^{-ty^2}}{1+t^3} \, dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|e^{-tx^2} - e^{-ty^2}|}{1+t^3} \, dt. \end{aligned}$$

On applique ensuite le résultat de **(a)** avec $a = tx^2$ et $b = ty^2$. Il s'en suit que

$$|F(x) - F(y)| \;\leq\; |x^2 - y^2| \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} \, dt}_{=C},$$

où $C \in]0,+\infty[$ car $\dfrac{t}{1+t^3} \sim \dfrac{1}{t^2}$ quand $t \to +\infty$ donc C est bien une intégrale convergente, et elle est clairement strictement positive car $\dfrac{t}{1+t^3} > 0$ quand $t > 0$.

(c). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $|F(x) - F(x_0)| \leq C\,|x^2 - x_0^2|$ donc par continuité de la fonction carré, en passant à la limite quand $x \to x_0$, on en déduit que $|F(x) - F(x_0)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ donc F est continue en x_0.

Ceci est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc F est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 3

1. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^k e^{-xt} = 0$, donc il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, on ait $t^k e^{-xt} \leq 1$. Comme $t \mapsto t^k e^{-xt}$ est continue sur $[0, t_0]$, elle y est bornée par un réel positif M, donc on a $t^k e^{-xt} \leq \max(M,1)$ sur $[0,+\infty[$.

Il s'en suit que $0 \leq \dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{\max(M,1)}{1+t^2}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente, donc par théorème de comparaison des intégrales à termes positifs, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \, dt$ converge.

2. (a). Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle et $\mathcal{C}^2$ sur $[0,u]$ ou $[u,0]$ (selon que $u \geq 0$ ou $u < 0$).

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et u à l'ordre 2, on a donc :

$$\begin{aligned} |e^u - 1 - u| &\leq \sup_{s \in [0,u] \text{ ou } s \in [u,0]} e^s \cdot \frac{u^2}{2} \\ &= \frac{u^2}{2} e^{|u|}. \end{aligned}$$

(b). Soit $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $|h| \in \left]0, \frac{x}{2}\right[$. Observons que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^k}{1+t^2} \frac{(e^{-ht} + ht - 1)\, e^{-xt}}{h} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{1+t^2} \frac{e^{-xt}}{|h|} |e^{-ht} + ht - 1| \, dt \end{aligned}$$

En appliquant **(b)** avec $u=-ht$, il s'en suit que

$$\begin{aligned}\left|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)\right| &\leq \int_0^{+\infty}\frac{t^k}{1+t^2}\frac{e^{-xt}}{|h|}\frac{(ht)^2}{2}e^{ht}\\ &= \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{k+2}}{1+t^2}e^{-(x-h)t}.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant $|h|<\frac{x}{2}$, on a $x-h\geq x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ donc $-(x-h)\leq -\frac{x}{2}$. Par croissance de la fonction exponentielle et de l'intégration, on en déduit le résultat vu la définition de $B_{k+2}\big(\frac{x}{2}\big)$.

(c). Par passage à la limite dans l'inégalité précédente quand $|h|\to 0$, on a par encadrement :

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x).$$

Ceci est vrai pour tout $x>0$, donc B_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $B_k'(x)=-B_{k+1}(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.

(d). D'après ce qui précède, B_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $B_0'(x)=-B_1(x)$. Comme B_1 est dérivable sur $]0,+\infty[$, on en déduit que B_0' est dérivable et $B_0''(x)=B_2(x)$.

B_2 est encore dérivable, donc en particulier continu, ce qui justifie que B_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

De plus, on a $B_2(x)+B_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(t^2+1)\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\left[-\frac{1}{x}\,e^{-tx}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}$.

3. Il est clair que $B_0(x)\geq 0$ et que $-B_0'(x)=B_1(x)\geq 0$.

Aussi, $B_0(x)\leq B_0(x)+B_2(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $0\leq B_0(x)\leq\dfrac{1}{x}$, et en intégrant par parties (les fonctions $t\mapsto\dfrac{t}{1+t^2}$ et $t\mapsto-\dfrac{e^{-tx}}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$), on obtient :

$$\begin{aligned}B_1(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\\ &= \left[-\frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}e^{-tx}\,dt\\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt\quad\text{car}\quad\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\leq 1\\ &= \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Donc par encadrement, $B_0(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $B_0'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

4. (a). Comme $e^{-tx}\leq 1$, on a $B_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leq\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$.

Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned}B_0(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\\ &\geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt,\end{aligned}$$

et sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, on a $e^{-tx}\geq e^{-x/\sqrt{x}}=e^{-\sqrt{x}}$, d'où $B_0(x)\geq e^{-\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

(b). On fait le changement de variable $t = \tan(u)$, $dt = (1 + \tan^2(u))\,du$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^y du$.

Il s'en suit que $\displaystyle\int_0^y du = \int_{\tan(0)}^{\tan(y)} \frac{dt}{1 + \tan(\tan^{-1}(t))^2} = \int_0^{\tan(y)} \frac{dt}{1 + t^2}$.

Par passage à la limite quand $y \to \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}$.

(c). Par passage à la limite quand $x \to 0^+$ dans l'encadrement trouvé en **(a)**, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} B_0(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3 Séries numériques

Exercice 1

1. On a $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}} - 1}$ car $\left|n^{\frac{4}{3}} + \cos(n)\right| \geq n^{\frac{4}{3}} - |\cos(n)| \geq n^{\frac{4}{3}} - 1$, et :

$$\frac{1}{n^{\frac{4}{3}} - 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{4/3}}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4/3}}$ est une série de Riemann convergente car $4/3 > 1$.

D'après le théorème de comparaison des séries à terme positif, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument donc converge.

2. On a l'équivalent usuel $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. D'après le théorème d'équivalence des séries à terme positifs, la série $\sum u_n$ est donc de même nature que la série harmonique, qui est divergente.

3. On applique l'identité trigonométrique $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2}\right) &= \sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2} - n\pi + n\pi\right) \\ &= \sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2} - n\right)\cos(n\pi) + \cos\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2} - n\right)\sin(n\pi). \end{aligned}$$

Comme $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on a

$$\sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2} - n\right).$$

D'autre part, en mutlipliant par la quantité conjuguée, on a

$$\sqrt{1 + n^2\pi^2} - n = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2\pi^2} + n},$$

donc

$$\sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + n^2\pi^2} + n}\right).$$

La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n}\right)\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante, et converge vers zéro car $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n}$. D'après le critère de convergence des séries alternées, on en déduit que la série

$$\sum_{n\geq 0}\sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)\quad\text{converge.}$$

Exercice 2

1. Pour $x\in\mathbb{R}_-$, $((-1)^{n+1}n^{-x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite donc la série diverge grossièrement.

2. (a). On a :

$$\begin{aligned}u_{2p+2}-u_{2p} &= \frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+2)^x}-\frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^x}\\ &= \frac{1}{(2p+2)^x}+\frac{1}{(2p+1)^x}\geq 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}u_{2p+3}-u_{2p+1} &= \frac{(-1)^{2p+3}}{(2p+3)^x}-\frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+2)^x}\\ &= -\frac{1}{(2p+3)^x}-\frac{1}{(2p+2)^x}\leq 0,\end{aligned}$$

donc la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et la suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par ailleurs, $u_{2p+1}-u_{2p}=\frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^x}=\frac{-1}{(2p+1)^x}\underset{p\to+\infty}{\to}0$ pour $x>0$.

On en déduit que ces deux suites sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite $S(x)$.

(b). Soit $\varepsilon>0$. D'après ce qu'il précède, il existe $n_1\in\mathbb{N}^*$ et $n_2\in\mathbb{N}^*$ tels que pour $k\geq n_1$ on ait $|u_{2k}-S(x)|\leq\varepsilon$ et pour $n\geq n_2$ on ait $|u_{2k+1}-S(x)|\leq\varepsilon$. On pose $n_0=2\max(n_1,n_2)+1$.

Alors pour tout $n\geq n_0$, soit n est pair et $n=2k$ avec $k\geq n_1$, soit n est impair et $n=2k+1$ avec $k\geq n_2$, donc dans tous les cas on a $|u_n-S(x)|\leq\varepsilon$.

(c). C'est la définition de la limite.

(d). Comme $(u_{2p})_{p\geq 1}$ est croissante, elle est toujours inférieure ou égale à sa limite, et comme $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ est décroissante, elle est toujours supérieure ou égale à sa limite.

On a donc $u_{2p}\leq S(x)\leq u_{2p+1}\leq u_{2p-1}$ (où la dernière inégalité vient juste de la décroissance de $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.

(e). On déduit de ce qui précède que $0\leq S(x)-u_{2p}\leq u_{2p+1}-u_{2p}=\frac{1}{(2p)^x}\leq\frac{1}{(2p+1)^x}$, et que $u_{2p}-u_{2p-1}\leq S(x)-u_{2p-1}\leq 0$, donc $S(x)-u_{2p-1}\geq\frac{1}{(2p)^x}$.

Dans tous les cas, on a bien $|S(x)-u_n|\leq\frac{1}{(n+1)^x}$.

Exercice 3

1. (a). $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ |a_n - \ell| \leq \varepsilon/2$.

(b). Soit $\varepsilon > 0$, et n_0 comme dans la question précédente.

Remarquons que $\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ell$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \ell)\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \ell|.\end{aligned}$$

En séparant la somme selon que $k \geq n_0$ ou non, et en utilisant la définition de la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} |a_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| + \frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

(c). On pose $C = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - \ell|$. Notons que C est une constante indépendante de n : on a donc :

$$\frac{C}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aussi, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq n_1$, on ait $\frac{C}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En prenant $n \geq \max(n_0, n_1)$, on déduit alors de la question précédente que :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers ℓ. C'est le bien connu théorème de Cesàro.

2. (a). Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour ce faire, observons que l'inégalité usuelle $|\sin(x)| \leq |x|$ s'écrit $\sin(x) \leq x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Initialisation : $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_1 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.

Hérédité : on suppose le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc $\sin(u_n) \leq u_n$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$. L'hérédité est donc acquise, ce qui conclut la récurrence.

Aussi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par zéro, donc elle converge, et sa limite ℓ vérifie $\sin(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \ell = 0$ (étudier la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[0, \pi/4]$). Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b). Prenons $\alpha = 2$. On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2\, u_{n+1}^2} \\ &= \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2}\end{aligned}$$

Un développement limité de $\sin^2(x)$ à l'ordre 4 quand $x \to 0$ donne :

$$\sin(u_n)^2 = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^2 = \left(u_n^2 - \frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4)\right).$$

On en déduit que $u_n^2 - \sin(u_n)^2 = \dfrac{u_n^4}{6} + o(u_n^4)$, donc le numérateur est équivalent à $\dfrac{u_n^4}{3}$.

Par ailleurs, un simple DL à l'ordre 1 du dénominateur (ou disons, l'équivalent usuel de $\sin(u_n)$) donne $u_n^2 \sin(u_n^2) \sim u_n^4$.

On en déduit que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \sim \dfrac{1}{3}$.

(c). On déduit des questions précédentes que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \quad = \quad \frac{1}{3}.$$

La somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ est téléscopique et se simplifie en $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{16}{\pi^2}$.

On en déduit que $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{16}{\pi^2}\right) \sim \frac{1}{3}$, donc $\frac{1}{u_n^2} - \frac{16}{\pi^2} = \frac{n}{3} + o(n)$, donc $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{16}{\pi^2} + o(n)$, et $\frac{16}{\pi^2} = o(n)$, d'où $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + o(n)$, donc $u_n^2 \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, donc la série de terme général u_n diverge par théorème d'équivalent des séries à termes positifs.

Exercice 4

1. Par croissance comparée, $\dfrac{n^2 \exp(n\lambda t)}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc $|u_n(t)| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série $\sum u_n(t)$ converge absolument, donc converge.

Ecrivons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-(-e^{\lambda t})^k}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{-(-e^{\lambda t})^k}{k!}. \end{aligned}$$

On reconnaît une série exponentielle, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = 1 - e^{-e^{\lambda t}}$.

2. (a). Comme f est continue sur le segment $I = [0, A]$, elle y est bornée par un réel $M \geq 0$, et pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t)\, R_n(t)| &= \left| f(t) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} e^{k\lambda t}}{k!} \right| \\ &\leq M \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k\lambda t}}{k!}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $q = k - n$ dans la somme ci-dessus, et en remarquant que $(q+n)! = n! \times (n+1) \cdots (n+q-1) \times (n-q) \geq n! \times 1 \times \cdots \times (q-1) \times q = n!\, q!$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |f(t)\, R_n(t)| &\leq M \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{(q+n)\lambda t}}{(q+n)!} \\ &= \frac{M}{n!} e^{n\lambda t} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda t}}{q!} \\ &\leq \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $t \leq A$ et la croissance de la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{qtA}}{q!}$ pour écrire la dernière inégalité.

(b). Soit $n \geq 2$. Notons $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(t)$.

On écrit :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)\, dt - \int_0^A S(t)\, f(t)\, dt \right| &= \left| \int_0^A f(t)\, [S_n(t) - S(t)]\, dt \right| \\ &\leq \int_0^A |f(t)\, R_n(t)|\, dt \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \int_0^A |f(t)\, R_n(t)|\, dt &\leq A \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée.} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)\, dt = \int_0^A S(t)\, f(t)\, dt$, autrement dit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{kt} f(t)\, dt = \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))\, f(t)\, dt.$$

3. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\lambda t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} (1 - \exp(-e^{\lambda t})) = 1$.

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^\delta \exp(-e^{\lambda t})\, dt \leq \varepsilon$.

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))\, f(t) - \int_0^A f(t)\, dt \right| &\leq \int_0^A \exp(-e^{\lambda t}) |f(t)|\, dt \\ &\leq M \int_0^A \exp(-e^{\lambda t})\, dt. \\ &\leq M\varepsilon + M \int_\delta^A \exp(-e^{\lambda t})\, dt \\ &\leq M\varepsilon + M \int_\delta^A \exp(-e^{\lambda \delta})\, dt \\ &= M\varepsilon + M(A-\delta) \exp(-e^{\lambda\delta}) \\ &\leq M\varepsilon + MA \exp(-e^{\lambda\delta}). \end{aligned}$$

Comme $\exp(-e^{\lambda\delta}) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \Lambda$, on ait $\exp(-e^{\lambda\delta}) \leq \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $\lambda \geq \Lambda$, on a

$$\left| \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))\, f(t) - \int_0^A f(t)\, dt \right| \;\leq\; M\varepsilon(1 + A).$$

Ceci implique que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))\; f(t) = \int_0^A f(t)\, dt$, et donc d'après la question **2**, question

$$\int_0^A f(t)\, dt \;=\; \lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)\, dt.$$

Algèbre

1 Applications linéaires & Polynômes

Exercice 1

1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. On souhaite montrer que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. On propose deux méthodes.

Méthode 1.

On pose $P = \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(e^x) = 0$. Comme $x \mapsto e^x$ est une bijection sur $\mathbb{R}$, ceci implique que P s'annule une infinité de fois, donc $P = 0$.

Il s'en suit que tous les coefficients de P sont nuls, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Méthode 2.

On factorise par le terme dominant, pour obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) \;=\; e^{nx}(\lambda_1 e^{(1-n)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{-x} + \lambda_n).$$

L'égalité $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ implique en particulier que $\lambda_1 e^{(1-n)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{-x} + \lambda_n = 0$. Par passage à la limite quand $x \to +\infty$, on en déduit $\lambda_n = 0$.

On est donc ramené à $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$, et le même argument répété $n - 1$ fois permet d'obtenir la nullité de tous les λ_i.

2. (a). Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker}(f)$. On a $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \iff y = \frac{2}{3}x$, donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\big(1, \frac{2}{3}\big)$.

Soit $(x, y) \in \operatorname{Im}(f)$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} 2a - 3b = x \\ 4a - 6b = y \end{cases}$.

On en déduit que $\begin{cases} 2a - 3b = x \\ 0 = y - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2a - 3b \\ y = 2x \end{cases}$. En particulier, $y = 2x$ implique que $(x, y) = (x, 2x) = x(2, 1)$, donc $(x, y) \in \operatorname{Vect}((1, 2))$. Donc $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Vect}((1, 2))$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$ donc $\mathrm{rg}(f) = 1$, d'où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1,2)$.

Autre méthode : on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{(2x-3y, 4x-6y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(2,4) - y(3,6),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}((2,4),(3,6))\\ &= \mathrm{Vect}((1,2)).\end{aligned}$$

(b). Soit $P\in\mathrm{Ker}(f)$. Alors $P' = 0$ donc $P\in\mathbb{R}$. Réciproquement, si $P = \lambda\in\mathbb{R}$, on a bien $P' = 0$ donc $f(P) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}$.

Démontrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$. Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose $Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt$. Alors Q est encore un polynôme de $\mathbb{R}[X]$: en effet, si $P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, alors $Q(x) = a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \cdots + a_0 t$.

On a alors $P = Q' = f(Q)$ donc $\mathbb{R}[X]\subset\mathrm{Im}(f)$, et l'inclusion réciproque est triviale.

Exercice 2

1. Trivial.

2. Notons que par définition de W, on a $WQ\in E$ pour tout $Q\in\mathbb{R}_2[X]$.

L'application ϕ est linéaire par linéarité du produit, et pour $Q\in\mathrm{Ker}\,\phi$, on a $WQ = 0$ avec $W\neq 0$, donc par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, il s'en suit que $Q = 0$, d'où $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$.

Aussi, ϕ est une application linéaire injective.

Soit $P\in E$. Alors P a pour racine 0 et 4, donc P est divisble par X et par $X-4$ qui sont des polynômes premiers entre eux, donc $W = X(X-4)$ divise P, ce qui veut dire qu'il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P = WQ$. Cette égalité implique en particulier que $\deg(Q) = 2$, donc $Q\in\mathbb{R}_2[X]$.

On en déduit que $\mathrm{Im}(\phi) = E$, donc ϕ est une application linéaire surjective.

Ceci conclut que ϕ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et E.

3. Comme $\phi\colon\mathbb{R}^2[X]\to E$ est un isomorphisme, l'image $(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2))$ de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est une base de E. Donc une base de E est donnée par (W, XW, X^2W), et $\dim(E) = 3$.

4. (a). Δ est clairement linéaire, et pour $Q\in\mathbb{R}_2[X]$, on a $\deg(\Delta(Q)) \leq \max\,(\deg(Q(X+1), \deg(Q)))$ donc $\deg(\Delta(Q))\leq 2$, donc $\Delta(Q)\in\mathbb{R}_2[X]$. Il suit que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b). Soit $Q\in\mathbb{R}_2[X]$. On écrit $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Alors $\Delta(Q) = a[(X+1)^2 - X^2] + b(X+1-X) + c = a\,(2X+1) + b + c = 2aX + a + b + c$. Donc si $Q\neq 0$, $\deg\Delta(Q) = \deg(Q) - 1$ et si $Q = 0$, $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) = -\infty$.

(c). Soit $Q\in\mathrm{Ker}(\Delta)$. Alors $Q(X+1) = Q(X)$.

Ecrivons $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Dans ce cas, $Q(X+1) = aX^2 + (b+2a)X + a + c$, donc en identifiant les coefficients de chaque monôme, on obtient :

$$\begin{cases} a + c = c\\ b + 2a = b\end{cases} \iff \begin{cases} a = 0\\ b = 0\end{cases},$$

donc Q est un polynôme constant. Réciproquement, si $Q = \lambda\in\mathbb{R}$, on a bien $Q(X+1) - Q(X) = \lambda - \lambda = 0$, donc on en déduit que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}$.

D'après **(b)**, on a $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_1[X]$. Par théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(\Delta) = 2$, ce qui conclut que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_1[X]$.

(d). Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. D'après **(b)**, on a $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$, donc en itérant, on a :

$$\begin{aligned} \deg((\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(P)) &\leq \deg(P) - 3 \\ &< 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta) = -\infty$ donc $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

5. (a). On écrit :

$$\begin{aligned} f \circ f \circ f &= \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ 0 \circ \phi^{-1} \text{ d'après } \mathbf{4.(\boldsymbol{d})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b). Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Alors $\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0$, donc $\Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0$, donc $\phi^{-1}(P) \in \mathrm{Ker}(\Delta)$, donc $\phi^{-1}(P) \in \mathbb{R}$, donc $P = \phi(\phi^{-1}(P)) \in \phi(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(W)$.

Réciproquement, si $P \in \mathrm{Vect}(W)$, alors $P = \lambda W$, donc par unicité $\phi^{-1}(P) = \lambda$, donc $\Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0$, donc $f(P) = 0$.

Remarquons que pour $P \in E$, on a $\deg(\phi^{-1}(P)) \leq 2$ donc $\deg(\Delta \circ \phi^{-1}(P)) \leq 1$, donc $\deg(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(P)) \leq 3$. On a donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

Par théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 4 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3$ donc on en déduit $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$, et une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $(1, X, X^2)$.

Exercice 3

1. (a). On a $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\,\mathrm{Id} - f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 = \mathrm{Id}$.

(b). Il suffit d'évaluer l'égalité précédente en $x \in \mathbb{R}^n$.

(c). Soit $x \in \mathbb{R}^n$, écrit sous la forme $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.

On a $f((f - \mathrm{Id})^2(x)) = f \circ (f - \mathrm{Id})^2\,(x) = 0$ par définition de f donc $(f - \mathrm{Id})^2(x) \in \mathrm{Ker}(f)$, et il est clair que $(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = f((2\,\mathrm{Id} - f)(x)) \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Par ailleurs, pour $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$, et on a $f^2(y) = 0$, donc $f \circ (f - \mathrm{Id})(y) = -f(y)$, donc $f(y) = 0$, donc $x = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

On en déduit que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. (a). Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un tel polynôme. Alors P doit vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + aX^2 + bX = 1 &\iff \left(a + \frac{1}{4}\right)X^2 + \left(b - \frac{5}{4}\right)X = 0 \\ &\iff a = -\frac{1}{4} \text{ et } b = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $P(X) = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}$ est (l'unique) solution au problème.

(b). En évaluant l'égalité vérifiée par P en l'endomorphisme f, on obtient :

$$\frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\right) \;=\; \mathrm{Id},$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x) + f \circ \left(-\frac{1}{4} f + \frac{5}{4} \right)(x).$$

On montre alors comme précédemment que $\frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et que $f \circ \left(-\frac{1}{4} f + \frac{5}{4} \right)(x)$, et on vérifie également que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, ce qui montre que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3. (a). X divise P car $P(0) = 0$, donc P s'écrit sous la forme $X(a_1 + a_2 X \cdots + a_p X^{p-1}) = a_1 X + \cdots + a_p X^p$ avec $p \geq 2$ (car $\deg(P) = 2$).

(b). Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$. Par ailleurs, on a $f^2(y) = 0$ donc en particulier, pour tout $n \geq 2$, $f^n(y) = 0$.

En remarquant que P s'écrit aussi $P = (a_1 + a_2 X \cdots + a_p X^{p-1})\, X$ et en évaluant cette égalité en f puis en y, on obtient $0 = P(f)(y) = (a_1 + a_2 f \cdots + a_p f^{p-1})(f(y)) = a_1 f(y)$, d'où $f(y) = 0$ comme $a_1 \neq 0$. Il s'en suit que $x = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Pour la question suivante, on cherche un polynôme Q vérifiant $1 + \frac{a_2}{a_1} X + \cdots + \frac{a_p}{a_1} X^{p-1} + X Q(X) = 1$.

Il suffit de prendre $Q(X) = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} X + \cdots + \frac{a_p}{a_1} X^{p-2}$.

On a alors $\mathrm{Id} + \frac{a_2}{a_1} f + \cdots + \frac{a_p}{a_1} f^{p-1} + f \circ \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} f + \cdots + \frac{a_p}{a_1} f^{p-2} \right) = \mathrm{Id}$, et on montre comme dans les questions précédentes qu'on en déduit $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(c). Dans la question **1**, $P = X(X-1)^2$, et dans la question **2**, $P = X(X-1)(X-4)$. Ce sont tous les deux des polynômes annulateurs de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.

La question **3** est donc bien une généralisation des deux précédentes.

Exercice 4

1. La fonction Φ est linéaire par linéarité du produit et de l'intégrale. Pour $f \in E$, on écrit

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(f)(t) = t \int_0^t q(u)\, f(u)\, du - \int_0^t u q(u)\, f(u)\, du.$$

Le théorème fondamental de l'intégration assure alors que la fonction $\Phi(f)$ est dérivable, et sa dérivée est donnée, pour tout $t \in [0,1]$, par

$$\begin{aligned} \Phi(f)'(t) &= \int_0^t q(u)\, f(u)\, du + t q(t)\, f(t) - t q(t)\, f(t) \\ &= \int_0^t q(u)\, f(u)\, du. \end{aligned}$$

Encore via ce même théorème, la fonction $\Phi(f)'$ est dérivable et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(f)''(t) = q(t)\, f(t),$$

donc $\Phi(f)''$ est continue. Il s'en suit que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. En particulier, $\Phi(f) \in E$ donc $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. (a). On montre que $'' \ \forall t \in [0,1] \quad |f_n(t)| \leq \|q\|_\infty^n \, \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!} \ ''$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $t \in [0,1]$, on a $f_0(t) = f(t)$ et $|f(t)| \leq \|f\|_\infty = \|q\|_\infty^0 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{t^0}{0!}$, donc l'initialisation est acquise.

Hérédité : on suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, que $\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \leq \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{t^n}{n!}$.

Soit $t \in [0,1]$. Par définition,

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(t)| &= |\Phi(f_n)(t)| \\ &= \left| \int_0^t (t-u)\, q(u)\, f_n(u)\, du \right| \\ &\leq \int_0^t |t-u|\, |q(u)|\, |f_n(u)|\, du. \end{aligned}$$

Pour $u \in [0,t]$, on a $|q(u)| \leq \|q\|_\infty$. Par hypothèse de récurrence, $|f_n(u)| \leq \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{u^n}{n!}$, et pour finir, on a $|t-u| \leq 1$ pour $0 \leq u \leq t \leq 1$. On déduit de ce qui précède et de ces trois inégalités que :

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(t)| &\leq \|q\|_\infty^{n+1} \frac{1}{n!} \int_0^t u^n\, du \\ &= \|q\|_\infty^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

L'hérédité est donc acquise, et ceci conclut la récurrence.

(b). Soit $t \in [0,1]$. Par croissance comparée, $\|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{u^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par théorème d'encadrement, on déduit de la question précédente que $|f_n(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci singnifie que la suite $(f_n(t))_{n \geq 0}$ converge vers zéro.

3. (a). L'application Δ est clairement linéaire par linéarité de la dérivation. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. Alors f vérifie $f(0) = f'(0) = 0$.

Soit $t \in [0,1]$. Comme $f \in F(q)$, on a $f''(t) = \Phi''(f)(t)$ d'après le résultat de la question **1**. En intégrant cette relation, il suit que $f'(t) = \Phi'(f)(t) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. En évaluant en zéro, on trouve $c = f'(0) = 0$.

En intégrant encore une fois, on a $f(t) = \Phi(f)(t) + d$, et en évaluant encore en zéro, on trouve $d = f(0) = 0$, d'où $f(t) = \Phi(f)(t)$. Ceci est vrai pour tout $t \in [0,1]$ donc $f = \Phi(f)$.

Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n(t))_{n \geq 0}$ est constante égale à $f_0(t) = f(t)$. Un passage à la limite quand $n \to +\infty$ permet alors d'obtenir $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $f = 0$.

Il suit que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \{0\}$, donc Δ est injective.

(b). Comme Δ est injective, on a $\dim(F(q)) \leq \dim(\Delta(F(q)))$ (par exemple via le théorème du rang), donc $\dim(F(q)) \leq 2$.

2 Matrices

Exercice 1

Après calcul, on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On a $A+B=A\,(B^{-1}\,B)+B=(A\,B^{-1}+I_n)\,B$, donc il suffit de démontrer que $A\,B^{-1}+I_n$ est inversible. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(I_n+AB^{-1})\sum_{k=0}^{2}(-AB^{-1})^k &= (I_n+AB^{-1})\,(I_n-AB^{-1}+A^2B^{-2})\\ &= I_n-AB^{-1}+A^2B^{-2}+AB^{-1}-A^2B^{-2}+A^3B^{-2}\\ &= I_n,\end{aligned}$$

donc I_n+AB^{-1} est inversible, d'inverse $I_n-AB^{-1}+A^2B^{-2}$.

On en déduit que $A+B$ est inversible, d'inverse égal à $B^{-1}-AB^{-2}+A^2B^{-3}$.

Exercice 3

1. Trivial.

2. On écrit $\mathrm{Tr}\,(AB)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\,b_{ik})$ et $\mathrm{Tr}(BA)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}\,a_{ik})$.

Donc $\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ik}a_{ki})$. On intervertit les deux signes sommes pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\,a_{ki}\right)\\ &= \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

3. On a $\mathrm{Tr}({}^tAA)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^{*}\,a_{ik})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\,a_{ik})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^2)$.

4. (a). On a $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tV\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc $U\,{}^tV\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par définition, $(U\,{}^tV)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}u_{ik}\,v_{jk}=u_i\,v_j$.

(b). On en déduit $\mathrm{Tr}\,U\,{}^tV=\sum_{k=1}^{n}u_k\,v_k$.

(c). On a $U\,{}^tV=\begin{pmatrix}u_1\,v_1 & \cdots & u_1\,v_n\\ u_2\,v_1 & & u_2\,v_n\\ \vdots & & \vdots\\ u_n\,v_1 & & u_n\,v_n\end{pmatrix}$. Comme U et V sont non nulles, il existe $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $v_j\neq 0$. Alors toute colone C_i de $U\,{}^tV$ avec $i\neq j$ s'écrit

$$v_i\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = \frac{v_i}{v_j}\times C_j,$$

donc toute colone de U^tV est proportionnelle à C_j. On en déduit que $\mathrm{Vect}\{C_1,\ldots,C_n\}\subset\mathrm{Vect}(U)$ donc $\mathrm{rg}(U^tV)\leq 1$. Par ailleurs, C_j est non nulle car U est non nulle, donc $\mathrm{Vect}\{C_1,\ldots,C_n\}\neq\{0\}$, donc $\mathrm{rg}(U^tV)=1$.

5. (a). Comme $\dim\mathrm{Vect}\,\{C_1,\ldots,C_n\}=1$, il existe $j_0\in[\![1,n]\!]$ tel que C_j est proportionnelle à C_{j_0} pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, donc il existe $\alpha_j\in[\![1,n]\!]$ tel que $C_j=\alpha_j\,C_{j_0}$.

(b). On pose $U=C_{j_0}$ et $V=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. Alors $(U\,{}^tV)_{ij}=(C_{j_0})_i\,\alpha_j=(C_j)_i=a_{ij}$.

On en déduit $A = U\,{}^tV$.

6. On a démontré que A est de rang 1 ssi $\exists U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $A = U{}^tV$.

7. On a dans ce cas $A = U{}^tV$ donc $A^2 = U{}^tVU{}^tV = U\,({}^tVU)\,{}^tV$.

Notons que ${}^tVU \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc ${}^tVU$ est une constante, donc

$$A^2 \;=\; ({}^tVU) \times U\,{}^tV \;=\; ({}^tVU)\,A.$$

D'autre part, ${}^tVU = \sum_{k=1}^n v_k\,u_k = \mathrm{Tr}(U{}^tV) = \mathrm{Tr}(A)$ donc $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Exercice 4

1. Trivial.

2. Pour déterminer la matrice $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le n}$ de f_m, on va évaluer f_m sur les éléments $1, \ldots, X^n$ de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} f_m(X^j) &= (X+m)^j \\ &= \sum_{i=0}^{j} \left\{ \binom{j}{i} m^{j-i} \right\} X^i. \end{aligned}$$

Il s'en suit que la matrice A a pour terme général $A(i,j) = \binom{j}{i} m^{j-i}$.

3. (a). Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi^m(P) = (f_1 \circ \cdots \circ f_1)(P) = P\Big(X + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}\Big) = P(X+n) = f_m(P)$.

Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a bien $\varphi^m = f_m$.

(b). Comme A est la matrice représentative de f_m dans $\mathcal{B}$ et que T est la matrice représentative de $\varphi = f_1$ dans $\mathcal{B}$, l'égalité $f_m = \varphi^m$ s'écrit matriciellement $A = T^m$.

Par ailleurs, $T(i,j) = \binom{j}{i} 1^{j-i} = \binom{j}{i}$ donc $A(i,j) = \binom{j}{i} m^{j-i} = m^{j-i}\,T(i,j)$.

4. L'application f_m est un isomorphisme. En effet elle est linéaire, et bijective car sa fonction réciproque est donnée par $f_m^{-1}(P) = P(X-m)$.

Il s'en suit que A est inversible, d'inverse A^{-1} dont le terme général est donné par $A^{-1}(i,j) = (-1)^{j-i} A(i,j)$.

5. En prenant $m = 1$, on déduit de la question précédente que T est inversible et que son inverse a pour terme général $T(i,j) = \binom{j}{i}(-1)^{j-i}$.

D'autre part, de la relation $T \times T^{-1} = I_{n+1}$ on déduit par définition du produit matriciel que pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= \sum_{k=0}^{n} T(i,k)\,T^{-1}(k,j) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}, \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j} = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 & \text{si} & i \ne j \\ 1 & \text{si} & i = j \end{smallmatrix} \right.$ est le symbole de Kroenecker.

En particulier, si $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$ sont tels que $p<q$, on a

$$\sum_{k=p}^{q}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k}$$

car $\binom{k}{p}=0$ si $k<p$ et $\binom{q}{k}=0$ si $k>q$, d'où d'après ce qu'on vient de montrer,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} &= \delta_{p,q}\\ &= 0 \text{ car } p\neq q.\end{aligned}$$

3 Probabilités

Exercice 1

1. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p\in[0,1]$, on a $X(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ donc $X(\omega)\geq t$ pour tout $t\in[0,1]$, donc $Y(\omega)=\int_0^1 X(\omega)\,dt=X(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$, donc $X=Y$.

2. (a). Comme X prend ses valeurs dans $\{-1,0,1\}$, on a $\mathbb{P}(X=0)=1-(\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1))$. On en déduit que $\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$.

(b). Soit $\omega\in\Omega$ et $t\in[0,1]$. Si $X(\omega)=-1$ ou $X(\omega)=0$, alors $\max(X(\omega),t)=t$, d'où $Y(\omega)=\dfrac{1}{2}$.

Si $X(\omega)=1$, alors $\max(X(\omega),t)=X(\omega)$ donc $Y(\omega)=X(\omega)=1$. On a donc bien $Y(\omega)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$, et le raisonnement précédent montre de plus que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y=\frac{1}{2}\right) &= \mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)\\ &= \frac{3}{4},\end{aligned}$$

tandis ce que $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{1}{4}$. Ceci détermine entièrement la loi de Y.

Pour calculer l'espérance, la formule de transfert donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(Y=\frac{1}{2}\right)+1\,\mathbb{P}(Y=1)\\ &= \frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

et pour la variance, on calcule d'abord le moment d'ordre 2, qui vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{4}\mathbb{P}\left(Y=\frac{1}{2}\right)+1\,\mathbb{P}(Y=1)\\ &= \frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{7}{16},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2\\ &= \frac{7}{16}-\frac{25}{64}\\ &= \frac{3}{64}.\end{aligned}$$

(c).

```
import numpy.random as rd
def Y():
    u = rd.random()
    if(u <=0.75):
        y=0.5
    else:
        y=1.0
return(y)
```

4. (a). On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Pour $\omega\in\Omega$, soit $X(\omega)\geq 1$, auquel cas $Y(\omega)=X(\omega)$, soit $X(\omega)=0$, auquel cas $Y(\omega)=\frac{1}{2}$, ce qui montre que $Y(\omega)\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\mathbb{N}^*$.

Donc $Y(\Omega)\subset\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\mathbb{N}^*$ et l'inclusion réciproque est triviale. La loi de Y est donnée par $\mathbb{P}\big(Y=\frac{1}{2}\big)=\mathbb{P}(X=0)=e^{-\lambda}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$.

(b). L'espérance de Y est donnée par $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[X]+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=\lambda+\frac{1}{2}e^{-\lambda}$, le moment d'ordre 2 de Y vaut $\mathbb{E}[Y^2]=\mathbb{E}[X^2]+\frac{1}{4}e^{-\lambda}=\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}e^{-\lambda}$, et la variance de Y vaut $\mathrm{Var}(Y)=\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}e^{-\lambda}-\big(\lambda+\frac{1}{2}e^{-\lambda}\big)^2=\lambda-\frac{3}{4}e^{-\lambda}-\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$.

Exercice 2

1. Par définition, on a $\omega\in B\Longleftrightarrow\omega\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\exists k\geq n\quad\omega\in A_k\Longleftrightarrow\omega\in\infty^{té}$ de A_k.

2. D'après l'inégalité de Boole, on a pour tout $N\geq n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N}A_k\right)\ \leq\ \sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k).$$

Comme la série de terme général $\mathbb{P}(A_k)$ converge, la suite $(\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k))_{N\geq n}$ converge et sa limite vaut $\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k)$. D'autre part, on sait d'après un théorème du cours que

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N}A_k\right)\ =\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\right),$$

et on peut alors utiliser le théorème de prolongement des inégalités dans l'inégalité de Boole pour obtenir le résultat souhaité.

3. Comme la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, d'après le théorème de la limite monotone, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\ =\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n).$$

D'autre part, d'après la question précédente,

$$0\leq\mathbb{P}(B_n)\ \leq\ \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k),$$

et la suite $(\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k))_{n\geq 1}$ converge vers zéro en tant que reste d'une série convergente. D'après le théorème de prolongement des inégalités, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n)=0$.

Exercice 3

1. En utilisant le fait que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$, on se ramène à une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k))\\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,\mathbb{P}(X>k-1) - k\,\mathbb{P}(X>k) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X>k-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X>k-1) - n\,\mathbb{P}(X>n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\,\mathbb{P}(X>n). \quad (\star)
\end{aligned}$$

2. Comme la série $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge, on peut écrire

$$\begin{aligned}
n\,\mathbb{P}(X>n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=k)\\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k),
\end{aligned}$$

Si X admet une espérance, la suite $\sum_{k=n}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge vers zéro comme limite d'une série convergente, donc comme $n\,\mathbb{P}(X>n) \geq 0$, le théorème de prolongement des inégalités permet d'en déduire que $n\,\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Par passage à la limite dans l'égalité $(\star)$ on en déduit le résultat souhaité.

3. On suppose que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>k)$ converge.

D'après la question **1**, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\,\mathbb{P}(X>n)\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).
\end{aligned}$$

La suite $(\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$ donc elle converge, ce qui montre que X admet une espérance.

Dans ces conditions, on a déjà montré à la question **2** que $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$.

Exercice 4

1. On applique l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|X-\lambda| \geq \lambda) \;\leq\; \frac{1}{\lambda}.$$

D'autre part, on a $\{X-\lambda\geq\lambda\}\subset\{|X-\lambda|\geq\lambda\}$ donc $\mathbb{P}(X-\lambda\geq\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}$.

Il s'en suit que $\mathbb{P}(X\geq 2\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}$.

2. (a). Comme indiqué, on pose $Y=(Z+x)^2$, et on applique l'inégalité de Markov, pour obtenir

$$\mathbb{P}(|Y|\geq(a+x)^2) \;\leq\; \frac{1}{(a+x)^2}\mathbb{E}[|Y|].$$

Notons que Y est positive donc $|Y|=Y$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[(Z+x)^2]=\mathbb{E}[Z^2]+2x\mathbb{E}[Z]+x^2$.

Comme Z est d'espérance nulle, on a $\mathbb{E}[Z]=0$ et $\mathrm{Var}(Z)=\mathbb{E}[Z^2]-(\mathbb{E}[Z])^2=\mathbb{E}[Z^2]$, donc $\mathbb{E}[Z^2]=\sigma^2$. On en déduit que $\mathbb{E}[Y]=\sigma^2+x^2$, d'où

$$\mathbb{P}(Y\geq(a+x)^2) \;\leq\; \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}.$$

Maintenant, remarquons que par croissance stricte de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on a l'égalité d'évènements $\{Y\geq(a+x)^2\}=\{(Z+x)^2\geq(a+x)^2\}=\{Z+x\geq a+x\}=\{Z\geq a\}$, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

(b). La fonction $h\colon x\mapsto\frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée vaut

$$h'(x) \;=\; \frac{2x(a+x)^2-2\,(a+x)(\sigma^2+x^2)}{(a+x)^4}.$$

On a donc $h'(x)\geq 0 \Longleftrightarrow x\,(a+x)^2\geq(a+x)(\sigma^2+x^2)\Longleftrightarrow x(a+x)\geq\sigma^2+x^2$ (car $a+x>0$).

Or $x(a+x)\geq\sigma^2+x^2\Longleftrightarrow ax\geq\sigma^2\Longleftrightarrow x\geq\frac{\sigma^2}{a}$. Il s'en suit que $h'(x)\geq 0$ sur $\left[\frac{\sigma^2}{a},+\infty\right[$ et $h'(x)\leq 0$ sur $\left[0,\frac{\sigma^2}{a}\right]$, donc h admet un minimum en $\frac{\sigma^2}{a}$ qui vaut $h\!\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)=\frac{\sigma^2+\frac{\sigma^4}{a^2}}{\left(a+\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$,

et en évaluant l'inégalité de la question **2. (a)** en $x=\frac{\sigma^2}{a}$, on obtient donc l'inégalité souhaitée.

(c). On applique l'inégalité de **2. (b).** avec $Z=X-\lambda$, qui est centrée de variance $\sigma=\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(X)=\lambda$, et avec $a=\lambda$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-\lambda\geq\lambda) \;&\leq\; \frac{\lambda}{\lambda+\lambda^2}\\ &=\frac{1}{\lambda+1}.\end{aligned}$$