P. Maurer

UCA - L2 Maths

Colle 1 - 09/03

1 Questions de cours

Question 1.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Définir la variance de X et l'écart-type de X, puis montrer que

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Question 2.

Enoncer et démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Question 3.

Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

2 Exos classiques

Exercice 1

On lance un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X le point obtenu.

1. Donner la loi de X.

2. On lance deux fois le dé. Soit S la somme des points obtenus. Donner la loi de S.

3. Calculer $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

4. Quelle est la probabilité que la somme S soit supérieure ou égale à 10 ?

Exercice 2

On jette 3 fois un dé à 4 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité que

1. Q ait deux racines réelles distinctes.

2. Q ait une racine réelle double.

3. Q n'ait pas de racine réelle.

Exercice 3

Montrer de deux manières que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

1. En utilisant un argument de dénombrement.

2. En considérant le polynôme $(X+1)^{2n}$.

Exercice 4

Soit A, B, C trois évènements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

3 Exos plus abstraits

Exercice 1

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(X\geq Y)$.

3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 2

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $a>0$, $\mathrm{Var}(aX_1)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)$.

2. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n) = \mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n).$$

Exercice 3

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, et X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $a>0$, on a

$$\mathbb{P}(|X|\geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[|X|].$$

2. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X).$$

3. (à voir car nécessite exo 1). Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$ et $\varepsilon>0$. On suppose qu'il existe $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$ tels que $\mathbb{E}[X_i]=m$ et $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.

Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right|\geq\varepsilon\right) \leq \frac{\sigma}{n\varepsilon^2}.$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right|\geq\varepsilon\right)=0$.