P. Maurer

ENS Rennes

Leçon 191. Exemple d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Devs :

- Théorème de Gauss-Wantzel
- Théorème de Hahn-Banach géométrique en dimension finie

Références :

1. Audin, Géométrie
2. Tauvel, Géométrie
3. Caldero, H2G2
4. Carrega, Théorie des corps : constructions à la règle et au compas
5. Avez, Calcul différentiel
6. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
7. Peyré, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

« Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique. »

Sont sympas, mais vu le temps qu'il me reste pour faire ce plan, je vais sauter à pied joints dans le deuxième écueil… Je conseille le plan d'Owen si vous voulez voir quelque chose de plus sérieux pour cette leçon.

1 Utilisation des groupes et des corps finis

1.1 Groupe affine et isométries affines

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des espaces affines, dirigés respectivement par E et par F des espaces vectoriels sur un corps k.

Définition 1. *Une application $\varphi\colon\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ est dite affine si il existe $O\in\mathcal{E}$ et une application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que :*

$$\forall M\in\mathcal{E}\quad \varphi(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

On dit que f est la partie linéaire de φ, et on note $f=:\vec{\varphi}$.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace affine dirigé par H. Si $f\colon\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ est affine et $g\colon\mathcal{F}\to\mathcal{H}$ est affine, alors leur composée $g\circ f\colon\mathcal{E}\to\mathcal{H}$ est encore affine, de partie linéaire $\overrightarrow{fog}=\vec{f}\circ\vec{g}$.*

Une application affine φ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\vec{\varphi}$ l'est. Les bijections affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un groupe, le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

Théorème 3. *L'application $\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{GA}(\mathcal{E}) & \to & \mathrm{GL}(E)\\ \varphi & \mapsto & \vec{\varphi}\end{array}\right.$ est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est le groupe des translations de $\mathcal{E}$, isomorphe au groupe $(E,+)$.*

Définition 4. *On appelle espace affine euclidien sur l'espace euclidien $(E,\|.\|_E)$ un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par E.*

$\mathcal{E}$ est muni d'une distance donnée par $d_{\mathcal{E}}(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|_E$ pour tout $A,B\in\mathcal{E}$.

Dorénavent, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des espaces affines euclidiens, dirigés respectivement par E et par F.

Définition 5.

On dit qu'une application $f\colon E\to F$ est une isométrie vectorielle si $\|f(x)\|_F=\|x\|_E$ pour tout $x\in E$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $E\to E$.

On dit qu'une application $f\colon\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ est une isométrie affine si $\|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\|_F=\|\overrightarrow{AB}\|_E$ pour tout $A,B\in\mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}\to\mathcal{E}$.

Exemple 6. Une translation est une isométrie affine.

Une homothétie est une isométrie affine si et seulement si son rapport est 1 ou -1.

Une symétrie est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Proposition 7. *$O(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, et $\mathrm{Isom}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$.*

Si φ est une isométrie vectorielle, sont déterminant vaut -1 ou 1.

Proposition 8. *Soit $\varphi\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application qui préserve les distances. Alors $\varphi\in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.*

Définition 9. *On appelle groupe spécial orthogonal de E, et on note $\mathrm{SO}(E)$, le noyau du morphisme $\det\colon E\to\{-1,1\}$. C'est un sous-groupe distingué de $O(E)$.*

On appelle sous-groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, et on note $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ le noyau du morphisme $\det\colon \mathcal{E}\to\{-1,1\}$ défini par $\det(\varphi)=\det(\vec{\varphi})$. C'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

Une isométrie affine qui n'est pas un déplacement est appelée un anti-déplacement.

Théorème 10. *Soit $v\in O(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E)=(\mathrm{Im}(v-\mathrm{Id}_E))^{\perp}$. En particulier, $E=\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Im}(v-\mathrm{Id}_E)$.*

Corollaire 11. *Soit $f\in\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. Il existe une isométrie $g\in\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ admettant un point fixe, et $x\in\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E)$ uniques, tels que $f=t_x\circ g$. De plus, g commute avec t_x.*

L'expression (unique) $f=t_x\circ g$ de l'isométrie f est appelé la forme canonique de f.

1.2 Groupes d'isométries fixant une partie

Définition 12. *Soit X une partie de $\mathcal{E}$. Le groupe d'isométries de X, note $\mathrm{Is}(X)$, est constitué des isométries affines qui laissent X invariant. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.*

Le groupe des déplacements de X, noté $\mathrm{Is}^+(X)$, est le sous-groupe des appications de $\mathrm{Is}(X)$ dont le déterminant de la partie linéaire vaut 1.

Exemple 13. On considère $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$ en tant qu'espace affine euclidien.

Le groupe diédral $D_n=\{1,R,\dots,R^{n-1},S,SR,\dots,SR^{n-1}\}$ est le groupe d'isométries d'un polygône régulier à n côtés.

Lemme 14. *Le groupe d'isométries d'un ensemble convexe laisse stable ses points extrémaux.*

Théorème 15. *On considère $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace affine euclidien.*

Le groupe d'isométries du tétraèdre Δ_4 est isomorphe à $\mathcal{S}_4$, et son groupe des déplacements est isomorphe à $\mathcal{A}_4$

Le groupe d'isométries du cube C_6 est isomorphe au produit $\mathcal{S}_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et son groupe des déplacements est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.

Application 16. *La table de caractère de $\mathcal{S}_4$ est donnée par :*

	$[1]$	$[2]$	$[2,2]$	$[3]$	$[4]$
id	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
χ_C	3	-1	-1	0	1
χ_V	2	0	2	0	-1

1.3 Corps finis et nombres constructibles

Définition 17. *Soit E un sous ensemble du plan $\mathbb{R}^2$.*

- *On dit qu'un point (x,y) est constructible sur E en une étape si (x,y) est l'intersection de deux objets parmi :*
  1. *L'ensemble des droites affines qui passent par deux éléments distincts de E*
  2. *L'ensemble des cercles dont le centre est un élément de E et le rayon est la distance. entre deux points distincts de E.*

  On note $C(E)$ l'ensemble des points constructibles sur E en une étape.
- *On définit par récurrence l'ensemble $C_n(E)$ des points constructibles sur E en n étapes par $C_{n+1}(E)=C(C_n(E))$.*
- *On dit que le point (x,y) est constructible sur E si $(x,y)\in\bigcup_{n=0}^{+\infty}C_n(E)$.*
- *Finalement, on dit qu'un nombre réel x est constructible si $(x,0)$ est constructible sur $\{(0,0),(0,1)\}$.*

Proposition 18. *Soit x,y des nombres constructibles.*

Alors :

- *La somme $x+y$ est constructible.*
- *La différence $x-y$ est constructible.*
- *Le produit xy est constructible.*

- *Si $y \neq 0$, le quotient x/y est constructible.*
- *La racine carrée $\sqrt{x}$ est constructible.*

Théorème 19. *(Wantzel, 1837)*

Un nombre réel a est constructible si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite finie de corps $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

- $L_0 = \mathbb{Q}$,
- $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad L_i \subset L_{i+1}$ *et* $[L_{i+1} : L_i] = 2$,
- $a \in L_n$.

En particulier, tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

Définition 20. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\hat{\theta}$ l'angle orienté dont une mesure en radian est θ. L'angle $\hat{\theta}$ est dit constructible si le point M du cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1 tel que $(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \hat{\theta}$, où $I = (1,0)$, est un point constructible.*

Proposition 21. *L'angle $\hat{\theta}$ est constructible si et seulement si le réel $\cos(\theta)$ est constructible.*

Lemme 22.

1. *Les angles de la forme $\widehat{\frac{2\pi}{2^\alpha}}$ sont constructibles pour $\alpha \in \mathbb{N}$.*
2. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ est constructible si et seulement si les angles $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ le sont.*

Développement 1 :

Théorème 23. *(Gauss-Wantzel)*

Soit p un nombre premier impair, et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat, c'est-à-dire $p = 1 + 2^{2^\beta}$ pour un certain $\beta \in \mathbb{N}$.

2 Utilisation de l'algèbre linéaire

2.1 En géométrie différentielle

Définition 24. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m en un point $x_0 \in M$ il existe un voisinnage ouvert U de x_0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.*

Proposition 25. *On suppose qu'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U contenant x_0, à valeurs réelles, telles que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ et que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.*

Alors l'ensemble $M = \{x \in U \ : \ \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m.

Définition 26. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x_0 \in M$. On appelle espace tangent en x_0 à M l'ensemble :*

$$T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists I \in \mathcal{I} \quad \exists \gamma \in D^1(I, M), \quad \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Où l'on a noté $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenant 0, et $D^1(I, M)$ est l'ensemble des applications différentiables de I vers M, pour $I \in \mathcal{I}$.

On identifie le plus souvent l'espace vectoriel $T_{x_0}(M)$ à l'espace affine passant par x_0 et parallèle à $T_{x_0}(M)$:

Proposition 27. *$T_{x_0}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de même dimension que M.*

Théorème 28. *Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ tel que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.*

On note $M = \{x \in U \ : \ \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ la sous-variété associée. Alors on a :

$$T_{x_0}(M) = \bigcap_{i=1}^{n-m} \mathrm{Ker}\,(D\varphi_i(x_0))$$

Lemme 29. *Soit $v, u_1, \dots, u_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $u_1, \dots, u_k$ sont linéairement indépendantes, et que $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.*

Application 30. *Théorème des extrema liés*

Soit $f, g_1, \dots, g_k \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *des applications de classe* $\mathcal{C}^1$*, et* $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$*. On suppose que* $f_{|M}$ *admet un extremum local en* $m \in M$*, et que la famille* $(Dg_i(m))_{0 \le i \le k}$ *est libre. Alors il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$Df(m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, Dg_i(m)$$

2.2 Sur les espaces affines

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.

Définition 31. *Si* $C \subset E$*, on dit que* C *est une partie convexe de* E *si pour tout* $x_1, \dots, x_k \in C$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in [0,1]$ *tels que* $\lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1$*, la combinaison convexe* $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ *est encore un élément de* C*.*

Exemple 32. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Alors la boule unité fermée de E est convexe.

Définition 33.

Soit $\mathcal{C}$ *un ouvert convexe de* E *contenant zéro. On définit la jauge de* $\mathcal{C}$ *comme l'application*

$$j_C \colon \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \mathcal{C}\} \end{array} \right. .$$

Lemme 34. *La jauge de* $\mathcal{C}$ *est bien définie sur* E*. Elle vérifie les propriétés suivantes, pour* x *et* y *des vecteurs de* E *:*

1. $\mathcal{C} = \{x \in E : j_C(x) < 1\}$,
2. $\forall \mu > 0 \quad j_C(\mu x) = \mu j_C(x)$, *($j_C$ est positivement homogène)*
3. $j_C(x+y) \le j_C(x) + j_C(y)$. *($j_C$ est sous-additive)*

Théorème 35. *(Hahn-Banach, forme analytique)*

Soit $p \colon E \to \mathbb{R}$ *positivement homogène et sous-additive. Soit* G *un sous-espace vectoriel de* E *et* g *une forme linéaire sur* G *telle que* $g \le p$*.*

Alors il existe une forme linéaire f *sur* E *telle que* $f_{|G} = g$ *et* $f \le p$ *sur* E*.*

Définition 36. *Soit* φ *une forme linéaire sur* E*. On appelle hyperplan affine de* E *tout ensemble* H *de la forme* $H = \mathrm{Ker}(\varphi - c)$*, où* c *est un réel quelconque.*

H *est alors un espace affine dirigé par l'hyperplan vectoriel* $\mathrm{Ker}(\varphi)$*.*

Définition 37.

Soit H *un hyperplan affine de* E*. On se donne* $\varphi \in E^*$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $H = \mathrm{Ker}(\varphi - c)$*.*

- *On appelle les demi-espaces limités par* H *les deux ensembles*

$$E_1 = \{x \in E : \varphi(x) \le c\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{x \in E : \varphi(x) \ge c\}.$$

- *Etant donné* A *et* B *deux parties de* E*, on dit que* H *sépare* A *et* B *si* $A \subset E_1$ *et* $B \subset E_2$ *ou* $A \subset E_2$ *et* $B \subset E_1$*.*

Développement 2 :

Lemme 38. *Soit* C *un convexe ouvert de* E *non vide et* $x_0 \in E \setminus C$*. Alors il existe un hyperplan affine* H *de* E *séparant* $\{x_0\}$ *et* C*.*

Théorème 39. *(Hahn-Banach, forme géométrique)*

Soit A *et* B *deux convexes de* E *disjoints et non vides. Si* A *est ouvert, il existe un hyperplan affine* H *qui sépare* A *et* B*.*