P. Maurer

ENS Rennes

# Leçon 181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

**Devs :**

- Théorème du point fixe de Markov Kakutani
- Théorème de Hahn Banach (géométrique) en dimension finie

**Références :**

1. Audin, Géométrie
2. Combes, Algèbre et géométrie
3. Truffault, Cours de géométrie
4. Objectif Agrégation
5. Tauvel, Géométrie
6. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
7. Testard, Analyse mathématique

*Note : pour des raisons pratiques liées à l'organisation un peu particulière des oraux de la session 2021, j'ai du rédiger ce plan sans avoir à disposition les livres de Tauvel et de Truffault.*

On se donne $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $K$ et $\mathcal{E}$ un espace affine sur $E$.

## 1 Barycentres et géométrie affine

### 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1.** *On appelle point pondéré un couple $(A,\lambda)\in\mathcal{E}\times K$.*

**Définition 2.** *Soit $(A_1,\lambda_1),\dots,(A_k,\lambda_k)$ des points pondérés tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_k\neq 0$.*

*On considère l'application $\varphi\colon M\mapsto\sum_{i=1}^k \lambda_i\,\overrightarrow{A_i O}$. Il existe un unique point $G\in\mathcal{E}$ tel que $\varphi(G)=\vec{0}$. On l'appelle le barycentre de cette famille de points, et on le note $\operatorname{bar}((A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq k})$.*

*Le barycentre de $(A_1,\lambda_1),\dots,(A_k,\lambda_k)$ est caractérisé par les relations :*

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i\,\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}\quad\text{et}\quad\forall O\in\mathcal{E}\quad\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i\right)\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^k\lambda_i\,\overrightarrow{OA_i}.$$

**Définition 3.** *Si $\lambda\neq 0$, on dit que $\operatorname{bar}((A_i,\lambda)_{1\leq i\leq k})$ est l'isobarycentre de la famille $(A_1,\lambda),\dots,(A_k,\lambda)$.*

**Exemple 4.** Soit $A,B\in\mathcal{E}$ distincts. Fixons une origine $O\in\mathcal{E}$. Les barycentres $G_\lambda=\operatorname{bar}((A,1-\lambda),(B,\lambda))$ où $\lambda\in K$, sont caractérisés par $\overrightarrow{OG}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Si $K=\mathbb{R}$, pour $\lambda\in[0,1]$, l'ensemble de ces barycentres est le segment $[AB]$. L'isobarycentre, obtenu pour $\lambda=\frac{1}{2}$, est le milieu $I$ du segment $[AB]$. Il est caractérisé par $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou par $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

**Proposition 5.** *La fonction $\varphi$ est appelée la fonction vectorielle de Leibnitz. Elle est constante si $\sum_{i=1}^k\lambda_i=0$. Sinon, c'est un isomorphisme d'espaces affines de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}_E$.*

**Proposition 6.** *(Associativité du barycentre). Soit $I$ un ensemble fini et $(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de points pondérés sur $\mathcal{E}$ telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i\neq 0$. Soit $I=\bigcup_{p=1}^s I_p$ une partition de $I$.*

*On suppose que $\mu_p=\sum_{i\in I_p}\lambda_i\neq 0$ pour tout $p\in[\![1,s]\!]$ et on note $G_p=\operatorname{bar}((A_i,\lambda_i):i\in I_p)$. Alors le barycentre de $(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$ est aussi celui de la famille $(G_p,\mu_p)_{1\leq p\leq s}$.*

**Exemple 7.** (Centre de gravité d'un triangle).

Soit $G$ le barycentre de $((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$. On suppose que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et que $\beta+\gamma\neq 0$. Le point d'intersection $A'$ de $AG$ et de $BG$ est le barycentre de $((B,\beta),(C,\gamma))$.

### 1.2 Barycentres dans les espaces affines

**Définition 8.** *Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est appelé un sous-espace affine s'il est vide ou si il contient un point $A$ tel que $\{\overrightarrow{AM}\ :\ M\in\mathcal{E}\}$ soit un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Proposition 9.** *Toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.*

**Définition 10.** *Soit $X$ une partie de $\mathcal{E}$. On appelle espace affine engendré par $X$ le sous-espace $\bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ s.e.a de } \mathcal{E} \\ X \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$, où l'intersection porte sur tous les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ contenant $X$. C'est aussi le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $X$.*

**Proposition 11.** *Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si tout barycentre de points pondérés de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

**Corollaire 12.** *Soit $X \neq \varnothing$ une partie de $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ engendré par $X$ est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de $X$.*

On se donne $\mathcal{F}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel $F$ sur $K$.

**Définition 13.** *Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine si il existe $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :*

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

*On dit que $f$ est la partie linéaire de $\varphi$, et on note $f =: \vec{\varphi}$.*

**Théorème 14.** *(Théorème fondamental de la géométrie affine).*

*Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Alors $f$ est une application affine si et seulement si pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, on ait :*

$$f(\operatorname{bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I})) = \operatorname{bar}((f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}).$$

**Corollaire 15.** *Soit $f \in \operatorname{Aut}(\mathcal{E})$ une application affine bijective. Si $f$ permute les points $A_1, \ldots, A_k$ de $\mathcal{E}$, alors $f$ laisse fixe l'isobarycentre $G$ de ces points.*

### 1.3 Repères affines

**Définition 16.** *On dit qu'une partie finie $X = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de $\mathcal{E}$ est un affinement libre si pour tout point $M$ du sous-espace affine engendré par $X$, il existe un seul système $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ de scalaires tels que*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad M = \operatorname{bar}((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)).$$

*Si $X$ n'est pas affinement libre, on dit qu'elle est affinement liée.*

**Définition 17.** *On dit que $X = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{E}$ est affinement génératrice si le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $X$ est $\mathcal{E}$ lui-même.*

**Définition 18.** *On dit que $X = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{E}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si elle est affinement libre et génératrice.*

*Dans ce cas, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ uniques tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ et $M = \operatorname{bar}((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k))$. On appelle ces scalaires les coordonnées barycentriques de $M$ dans le repère affine $X$.*

**Proposition 19.** *Pour que $X = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{E}$ soit une partie affinement libre (resp. génératrice, resp. un repère affine) de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\}$ soit une famille libre (resp. génératrice, resp. une base) de l'espace vectoriel $E$.*

**Corollaire 20.** *Soit $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n} \in E$. Alors $(A, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{A_0 = A, A_1 = A_0 + \vec{e_1}, \ldots, A_n = A_0 + \vec{e_n}\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.*

**Corollaire 21.** *On suppose $\mathcal{E}$ muni d'un repère affine $(A_0,\ldots,A_n)$ et on se donne $B_0,\ldots B_n$ des points de $\mathcal{F}$. Il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. De plus, $f$ est un isomorphisme si et seulement si $(B_0, \ldots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{F}$.*

**Définition 22.** *Pour $P, Q, R$ trois points du plan non alignés, avec $R$ et $Q$ distincts de $P$, on définit le rapport de mesures algébriques $\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ comme le seul scalaire vérifiant $\overrightarrow{PR} = \left(\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}\right) \cdot \overrightarrow{PQ}$.*

**Théorème 23.** *(Théorème de Ceva).*

*Soit $A, B, C$ des points non alignés du plan, et $D, E, F$ distincts de $A, B, C$ respectivement sur $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Alors $(AD)$, $(BE)$ et $(CF)$ sont concourantes si et seulement si*

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

**Théorème 24.** *(Théorème de Melanüs).*

*Soit $A, B, C$ des points non alignés du plan, et $D, E, F$ distincts de $A, B, C$ respectivement sur $(BC), (CA)$ et $(AB)$. Alors $D, E, F$ sont contenus dans une droite affine si et seulement si*

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

## 2 Convexité et applications

On prend ici $K=\mathbb{R}$.

### 2.1 Parties convexes d'un espace affine réel

**Lemme 25.** *Soit $C$ une partie de $\mathcal{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *Le barycentre $G$ de toute famille finie $(A_1,\lambda_1),\ldots,(A_k,\lambda_k)$ de points pondérés de $C$ telle que $\lambda_1\geq 0,\ldots,\lambda_k\geq 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i=1$, appartient à $C$.*
- $\forall M\in C \quad \forall N\in C \quad [MN]=\{M+\lambda\,\overrightarrow{MN}\ :\ 0\leq\lambda\leq 1\}\subset C$.

**Définition 26.** *Une partie $C$ de $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions équivalentes précédentes est dite convexe. On appelle dimension de $C$ la dimension du sous-espace affine engendré par $C$. On convient que $\varnothing$ est une partie convexe.*

**Proposition 27.** *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$. Alors $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.*

**Proposition 28.** *L'image directe et l'image réciproque d'une partie convexe d'un espace affine par une fonction affine sont convexes.*

**Définition 29.** *Si $E$ est un espace vectoriel et $C\subset E$, on dit que $C$ est une partie convexe de $E$ si pour tout $x_1,\ldots,x_k\in C$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_d\in[0,1]$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_d=1$, la combinaison convexe $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k$ est encore un élément de $C$.*

**Exemple 30.** Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Alors la boule unité fermée de $E$ est convexe.

**Définition 31.** *Une partie $A\subset E$ est dite étoilée s'il existe $x\in A$ tel que pour tout $y\in A$, toute combinaison convexe de $x$ et de $y$ est dans $A$.*

**Remarque 32.** Une partie convexe est étoilée.

**Définition 33.**

*Soit $\mathcal{C}$ un ouvert convexe de $E$ contenant zéro. On définit la jauge de $\mathcal{C}$ comme l'application*

$$j_C\colon\left\{\begin{array}{lcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \inf\{\lambda>0\ :\ x\in\lambda\mathcal{C}\}\end{array}\right..$$

**Lemme 34.** *La jauge de $\mathcal{C}$ est bien définie sur $E$. Elle vérifie les propriétés suivantes, pour $x$ et $y$ des vecteurs de $E$ :*

1. $\mathcal{C}=\{x\in E\ :\ j_C(x)<1\}$,
2. $\forall\mu>0 \quad j_C(\mu x)=\mu\, j_C(x)$, *($j_C$ est positivement homogène)*
3. $j_C(x+y)\leq j_C(x)+j_C(y)$. *($j_C$ est sous-additive)*

### 2.2 Enveloppe convexe et points extrémaux

**Définition 35.** *Soit $X\neq\varnothing$ une partie de $\mathcal{E}$. L'intersection $\mathrm{Conv}(X)$ de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent $X$ est appelée l'enveloppe convexe de $X$. C'est l'ensemble des barycentres $G=\mathrm{bar}((A_1,\lambda_1),\ldots,(A_k,\lambda_k))$ avec $A_1,\ldots,A_k\in X$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\geq 0$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$.*

*On définit de même l'enveloppe convexe d'une partie $A\subset E$ comme le plus petit convexe contenant $A$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $A$.*

**Proposition 36.** *Soit $f\colon\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ une application affine, et $X\subset\mathcal{E}$. Alors $f(\mathrm{Conv}(X))=\mathrm{Conv}(f(X))$.*

**Théorème 37.** *(Carathéodory).*

*Soit $A\subset\mathcal{E}$, avec $\mathcal{A}\neq\varnothing$. Tout élément de l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$ de $A$ s'écrit comme combinaison convexe de $N+1$ points de $\mathcal{A}$, où $N+1=\dim(E)$.*

**Développement 1 :**

**Corollaire 38.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble compact est compacte.*

**Corollaire 39.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée, et de plus si $(E,d)$ est un espace métrique et $A\subset E$, on a $\delta(\mathrm{Conv}(A))=\delta(A)$, où $\delta(A):=\sup_{x,x'\in A} d(x,x')$ désigne le diamètre de $A$.*

**Théorème 40.** *(Point fixe de Markov-Kakutani).*

*Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension $N\in\mathbb{N}^*$, et $G$ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$.*

*On se donne $K$ une partie convexe compacte de $E$ et on suppose que $K$ est stable par tous les éléments de $G$. Alors il existe $x\in K$ tel que pour tout $g\in G$, on ait $g(x)=x$. Autrement dit, $G$ possède un point fixe dans $K$.*

**Corollaire 41.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est ouverte.*

**Exemple 42.** L'enveloppe convexe du fermé $\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ y \geq \frac{1}{x}\right\}$ est $\{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}_+^*)^2$ qui n'est pas un fermé.

**Théorème 43.** *(Gauss-Lucas).*

*Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. L'ensemble des zéros de $P'$ est dans l'enveloppe convexe des zéros de $P$.*

**Théorème 44.** *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.*

**Lemme 45.** *Soit $C$ une partie convexe de $\mathcal{E}$ et $P \in C$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\forall M \in C \quad \forall N \in C \quad P = \mathrm{bar}\Big(\big(M, \frac{1}{2}\big), \big(N, \frac{1}{2}\big)\Big) \Longrightarrow M = P = N.$
- $\forall M \in C \quad \forall N \in C \quad \forall \lambda \in ]0,1[ \quad P = \mathrm{bar}((M, 1-\lambda), (N, \lambda)) \Longrightarrow M = P = N.$
- *Le complémentaire $C_0$ de $\{P\}$ dans $C$ est convexe.*

**Définition 46.** *Un tel point $P \in C$ qui ne peut être isobarycentre de deux points de $C$, est appelé un point extrémal de $C$.*

**Proposition 47.** *Soit $C$ une partie convexe de $\mathcal{E}$. Toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $f(C) = C$ permute les points extrémaux de $C$.*

**Exemple 48.** Dans un espace euclidien $(E, \|\cdot\|)$, l'ensemble des points extrémaux de la boule unité $B(0,1)$ est la sphère unité $S(0,1)$.

**Proposition 49.** *Une partie convexe $A$ privée de ses points extrémaux reste convexe.*

**Théorème 50.** *(Théorème de Krein-Milman, admis).*

*Tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

## 2.3 Projection et séparation

**Théorème 51.** (de projection sur un convexe fermé)

*Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. Soit $\Gamma$ une partie fermée, convexe, non vide de $H$. Alors pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $y \in \Gamma$ tel que*

$$\|x - y\| = \inf_{\gamma \in \Gamma} \|x - \gamma\| = d(x, \Gamma).$$

*Ce point est appelé projection de $x$ sur $\Gamma$ et est noté $p_\Gamma(x)$. Il est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\begin{cases} p_\Gamma(x) \in \Gamma \\ \forall \gamma \in \Gamma \quad \mathfrak{Re}\langle x - p_\Gamma(x), \gamma - p_\Gamma(x)\rangle \leq 0 \end{cases}.$$

**Corollaire 52.** (de représentation de Riesz).

*Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors l'application $\delta$ définie par*

$$\mathcal{L} : \begin{cases} H & \to & H' \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a = (x \mapsto \langle x, a\rangle) \end{cases}$$

*est une bijection antilinéaire isométrique.*

**Théorème 53.** *(Hahn-Banach, forme analytique)*

*Soit $p : E \to \mathbb{R}$ positivement homogène et sous-additive. Soit $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $g$ une forme linéaire sur $G$ telle que $g \leq p$.*

*Alors il existe une forme linéaire $f$ sur $E$ telle que $f_{|G} = g$ et $f \leq p$ sur $E$.*

**Définition 54.** *Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $E$. On appelle hyperplan affine de $E$ tout ensemble $H$ de la forme $H = \mathrm{Ker}(\varphi - c)$, où $c$ est un réel quelconque.*

*$H$ est alors un espace affine dirigé par l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi)$.*

**Définition 55.**

*Soit $H$ un hyperplan affine de $E$. On se donne $\varphi \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $H = \mathrm{Ker}(\varphi - c)$.*

- *On appelle les demi-espaces limités par $H$ les deux ensembles*

$$E_1 = \{x \in E : \ \varphi(x) \leq c\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{x \in E : \ \varphi(x) \geq c\}.$$

- *Etant donné $A$ et $B$ deux parties de $E$, on dit que $H$ sépare $A$ et $B$ si $A \subset E_1$ et $B \subset E_2$ ou $A \subset E_2$ et $B \subset E_1$.*

**Développement 2 : ($\star$)**

**Lemme 56.** *Soit $C$ un convexe ouvert de $E$ non vide et $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe un hyperplan affine $H$ de $E$ séparant $\{x_0\}$ et $C$.*

**Théorème 57.** *(Hahn-Banach, forme géométrique)*

*Soit $A$ et $B$ deux convexes de $E$ disjoints et non vides. Si $A$ est ouvert, il existe un hyperplan affine $H$ qui sépare $A$ et $B$.*

($\star$) : Le développement contient également la preuve du lemme 34 sur la jauge. En revanche, on admet la version analytique du théorème de Hahn-Banach.