P. MAURER
ENS RENNES

Leçon 161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Devs :

- Table de $\mathcal{S}^4$ et isométries du cube
- Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple

Référence :

1. Audin, Géométrie
2. Combes, Algèbre et géométrie
3. Perrin, Cours d'algèbre
4. Gourdon, Algèbre
5. Caldero, H2G2
6. Peyré, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

1 Espaces affines euclidiens. Notion de distance.

1.1 Applications affines, généralités.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des espaces affines, dirigés respectivement par E et par F des espaces vectoriels sur un corps k.

Définition 1. *Une application $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine si il existe $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :*

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

On dit que f est la partie linéaire de φ, et on note $f =: \vec{\varphi}$.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace affine dirigé par H. Si $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine et $g: \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ est affine, alors leur composée $g \circ f: \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ est encore affine, de partie linéaire $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$.*

Une application affine φ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\vec{\varphi}$ l'est. Les bijections affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un groupe, le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

Théorème 3. *L'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(\mathcal{E}) & \to & \mathrm{GL}(E) \\ \varphi & \mapsto & \vec{\varphi} \end{array} \right.$ *est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est le groupe des translations de $\mathcal{E}$, isomorphe au groupe $(E, +)$.*

Théorème 4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout couple $(O, O') \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, il existe une unique application affine $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ qui envoie O sur O' et qui vérifie $\vec{\varphi} = f$.*

Corollaire 5. *Soit $O \in \mathcal{E}$. Alors toute application affine $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\varphi = t_u \circ \psi$, où t_u est une translation de vecteur $u \in E$ et ψ est une application affine fixant O.*

Théorème 6. *Soit $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On suppose que $E = \mathrm{Ker}(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\vec{\varphi} - \mathrm{Id})$. Alors il existe un unique $v \in E$ et une unique application affine $\psi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ avec un point fixe tels que :*

$$\vec{\varphi}(v) = v \quad \text{et} \quad \varphi = t_v \circ \psi$$

De plus, t_v et ψ commutent.

1.2 Isométries affines

$(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent des espaces euclidiens.

Définition 7. *On appelle espace affine euclidien sur l'espace euclidien $(E, \|.\|_E)$ un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par E.*

$\mathcal{E}$ est muni d'une distance donnée par $d_{\mathcal{E}}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_E$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.

Dorénavent, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des espaces affines euclidiens, dirigés respectivement par E et par F.

Définition 8.

On dit qu'une application $f: E \to F$ est une isométrie vectorielle si $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $E \to E$.

On dit qu'une application $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une isométrie affine si $\|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\|_F = \|\overrightarrow{AB}\|_E$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Exemple 9. Une translation est une isométrie affine.

Une homothétie est une isométrie affine si et seulement si son rapport est 1 ou -1.

Une symétrie est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Proposition 10. *$O(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, et $\mathrm{Isom}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$.*

Si φ est une isométrie vectorielle, sont déterminant vaut -1 ou 1.

Proposition 11. *Soit $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application qui préserve les distances. Alors $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.*

Définition 12. *On appelle groupe spécial orthogonal de E, et on note $\mathrm{SO}(E)$, le noyau du morphisme $\det: E \to \{-1, 1\}$. C'est un sous-groupe distingué de $O(E)$.*

On appelle sous-groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, et on note $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ le noyau du morphisme $\det: \mathcal{E} \to \{-1, 1\}$ défini par $\det(\varphi) = \det(\vec{\varphi})$. C'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

Une isométrie affine qui n'est pas un déplacement est appelée un anti-déplacement.

1.3 Distance. Matrices et déterminants de Gram.

E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 13. *On appelle matrice de Gram de $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1, \ldots, x_n)$.*

Exemple 14. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On muni $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \mathbb{E}[fg]$.

Si $X \colon L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est un vecteur aléatoire, sa matrice de variance-covariance, donnée par $(C_X)_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \langle X_i - \mathbb{E}[X_i], X_j - \mathbb{E}[X_j] \rangle$ est une matrice de Gram.

Son déterminant de Gram est appelé variance généralisée du vecteur X.

Proposition 15. *Toute matrice de Gram est hermitienne positive. Réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram. De plus, la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est définie si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre.*

Théorème 16. *Soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_k)$, et $x \in E$. Alors :*

$$d^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_k, x)}{G(e_1, \ldots, e_k)} \quad \text{où} \quad d = \inf_{v \in V} \|x - v\|$$

Application 17. Soit $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\int_0^1 (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \, dx$. Alors φ admet un minimum μ, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et $\mu = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2 Etude du groupe orthogonal

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire standard.

2.1 Générateurs et réduction

Définition 18. *On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales : ce sont les matrices carrées de taille n pour lesquelles l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé est une isométrie vectorielle de $O(\mathbb{R}^n)$.*

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ le noyau de det dans $O_n(\mathbb{R})$: ce sont les matrices carrées de taille n pour lesquelles l'endomorphisme canoniquement associé est un élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 19. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A A^T = I_n$.*

Proposition 20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A transforme toute base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ en base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 21. *Le centre de $O_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{Z} = \{I_n, -I_n\}$. En particulier, pour $n \geq 2$, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif. Pour $n \geq 3$, le centre de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{Z} \cap \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\{I_n\}$ si n est impair, $\{I_n, -I_n\}$ si n est pair.*

Proposition 22. *$O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors A est produit d'au moins n réflexions.*

Proposition 23. *Pour $n \geq 3$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements, plus précisément, tout élément $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n renversements.*

Proposition 24. *Les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.*

Théorème 25. *(Réduction des isométries vectorielles)*

Soit f un endomorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

Où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, avec $\theta_i \in \mathbb{R}$ et $\theta_i \not\equiv 0 \, [\pi]$.

2.2 Topologie

Théorème 26. *$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, c'est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 27. *Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arc) : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe.*

Développement 1 :

Théorème 28. *Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Proposition 29. *On a un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donné par la multiplication des matrices.*

3 Classification des isométries

3.1 Généralités

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien, dirigé par l'espace vectoriel euclidien E.

Théorème 30. *Soit* $v \in O(E)$*. Alors* $\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(v-\mathrm{Id}_E))^{\perp}$*. En particulier,* $E = \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(v-\mathrm{Id}_E)$*.*

Corollaire 31. *Soit* $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$*. Il existe une isométrie* $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ *admettant un point fixe, et* $x \in \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E)$ *uniques, tels que* $f = t_x \circ g$*. De plus,* g *commute avec* t_x*.*

L'expression (unique) $f = t_x \circ g$ *de l'isométrie* f *est appelé la forme canonique de* f*.*

Application 32. Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que f^n ait un point fixe. Alors f a un point fixe.

3.2 Isométries du plan

Définition 33. *Soit* D *une droite affine de* E*. On appelle symétrie glissée d'axe* D *une application de la forme* $f = t_u \circ s_D$ *où* u *est un vecteur directeur de* D*, et* s_D *est la symétrie orthogonale d'axe* D*.*

Proposition 34. *Les déplacements du plan sont constitués des translations et des rotations. Un déplacement a un point fixe si et seulement si c'est une rotation.*

Proposition 35. *Les antidéplacements du plan sont constitués des symétries orthogonales par rapport à une droite et des symétries glissées. Un antidéplacement a un point fixe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

En annexe, on donne le tableau récapitulatif des isométries du plan.

3.3 Isométries de l'esapce

Définition 36. *Soit* $\mathcal{P}$ *un plan de l'espace passant par* $A \in \mathbb{R}^3$*, dirigé par* $P \subset \mathbb{R}^3$*, de base* (u,v)*, complétée en* (u,v,w) *base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$*.*

Pour $M \in \mathcal{E}$*,* $\overrightarrow{AM} = xu + yv + zw$*. On défini alors la symétrie orthogonale* $s_{\mathcal{P}}$ *par rapport à* $\mathcal{P}$ *par* $\overrightarrow{As_{\mathcal{P}}(M)} := xu + yv - zw$*.*

$s_{\mathcal{P}}$ *est une application affine, et sa partie linéaire a pour matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 37. *Soit* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *deux plans de l'espace. Alors la composée* $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}'}$ *est :*

- *Une translation si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont parallèles.*
- *Une rotation si* $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ *est une droite.*

Remarque 38. Réciproquement, toute rotation de l'espace peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales.

Définition 39. *On appelle vissage toute isométrie de l'espace de la forme :*

$$f = r_D \circ t_u$$

Où r_D *est une rotation d'axe une droite* D*, et* t_u *une translation de vecteur* u*.*

Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$. On raisonne sur la dimension de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$:

Proposition 40. *Si* $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})) = 3$*,* f *est une translation.*

Proposition 41. *Si* $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})) = 2$*,* f *est :*

- *Une symétrie orthogonale par rapport à un plan* $s_{\mathcal{P}}$ *dirigé par* $P = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ *si* f *a un point fixe.*
- *Une symétrie glissée si* f *n'a pas de point fixe.*

Proposition 42. *Si* $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})) = 1$*,* f *est :*

- *Une rotation d'axe* $D = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ *si* f *a un point fixe.*
- *Un vissage si* f *n'a pas de point fixe.*

Proposition 43. *Si* $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})) = 0$*,* f *est une antirotation, i.e la composée d'une rotation d'axe une droite et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan.*

4 Isométries d'un solide. Applications.

Définition 44. *Soit* X *une partie de* $\mathcal{E}$*. Le groupe d'isométries de* X*, note* $\mathrm{Is}(X)$*, est constitué des isométries affines qui laissent* X *invariant. C'est un sous-groupe de* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$*.*

Le groupe des déplacements de X*, noté* $\mathrm{Is}^+(X)$*, est le sous-groupe des applications de* $\mathrm{Is}(X)$ *dont le déterminant de la partie linéaire vaut* 1*.*

Exemple 45. On considère $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$ en tant qu'espace affine euclidien.

Le groupe diédral $D_n=\{1,R,\dots,R^{n-1},S,SR,\dots,SR^{n-1}\}$ est le groupe d'isométries d'un polygône régulier à n côtés.

Lemme 46. *Le groupe d'isométries d'un ensemble convexe laisse stable ses points extrémaux.*

Développement 2 :

Théorème 47. *On considère $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace affine euclidien.*

Le groupe d'isométries du tétraèdre Δ_4 est isomorphe à $\mathcal{S}_4$, et son groupe des déplacements est isomorphe à $\mathcal{A}_4$

Le groupe d'isométries du cube C_6 est isomorphe au produit $\mathcal{S}_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et son groupe des déplacements est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.

Application 48. La table de caractère de $\mathcal{S}_4$ est donnée par :

	[1]	[2]	[2, 2]	[3]	[4]
id	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
χ_C	3	-1	-1	0	1
χ_V	2	0	2	0	-1

5 Annexe

5.1 Isométries du plan

f (réduite)	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	
			Point fixe	Sans point fixe
Classe	Translation	Rotation	Symétrie orthogonale	Symétrie glissée
Ensemble invariant	$\varnothing$	Un point	Une droite	$\varnothing$

5.2 Isométries de l'espace

dim(Ker(f − Id))	Nature de φ		
0	$\varphi=s_{\mathcal{P}}\circ r_{\mathcal{D}}$		
1	Point fixe	Sans point fixe : $\varphi=t_{\vec{u}}\circ\psi$	
	$\varphi=r_{D,\theta}$	$\vec{u}\in D$	$\vec{u}\notin D$
		$\varphi=t_{\vec{u}}\circ r_D$	$\varphi=t_{\vec{u}'}\circ r_D$
2	Point fixe	Sans point fixe : $\varphi=t_{\vec{u}}\circ\psi$	
	$s_{\mathcal{P}}$	$\vec{u}\in P^\perp$	$\vec{u}\notin P^\perp$
		$\varphi=s_{\mathcal{P}}$	$\varphi=t_{\vec{u}'}\circ s_{\mathcal{P}''}$
3	$\varphi=t_{\vec{u}}$		