P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.

Devs :

- L'exponentielle de matrices $\exp\colon \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
- Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Griffone, Algèbre linéaire
3. Caldero, H2G2

Dans tout le plan, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. $f \in \mathcal{L}(E)$ désigne un endomorphisme de E, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1 Adjoint d'un endomorphisme.

1.1 Définitions et propriétés

Proposition 1. *Il existe un unique endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$\forall x, y \in E \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

g est appelé adjoint de E, et on note $f^* := g$.

Remarque 2. $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 3. Si B est une base orthonormée de E, on a :

$$\mathrm{mat}_B(f^*) = \overline{\mathrm{mat}_B(f)}^T$$

Exemple 4. $M M^T = 0 \Longrightarrow M = 0$.

Proposition 5. *Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a :*

- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$ *et* $\det(f^*) = \det(f)$
- $\mathrm{Im}(f)^\perp = \mathrm{Im}(f^*)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)$
- $\chi_{f^*} = \chi_f$ *et* $\mu_{f^*} = \mu_f$

Proposition 6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f^*.*

1.2 Vocabulaire

Définition 7. *On dit que f est autoadjoint (ou symétrique) si $f^* = f$.*
Matriciellement, cela se traduit par $A^T = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Exemple 8. Les projecteurs sont autoadjoints.

Remarque 9. Si de plus f vérifie $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ (resp. >0), on dit que f est positif (resp. défini positif). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Définition 10. *On dit que f est antisymétrique si $f^* = -f$.*
Matriciellement, cela se traduit par $A^T = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Définition 11. *On dit que f est orthogonal si $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.*
Matriciellement, cela se traduit par $A A^T = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Définition 12. *On dit que f est normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.*
Matriciellement, cela se traduit par $A A^T = A^T A$.

Remarque 13. Les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux sont tous normaux.

2 Réduction. Applications.

2.1 Endomorphismes autoadjoints.

Proposition 14. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. Si de plus A est positive (resp. définie positive), alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).*

Proposition 15. *On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.*

Corollaire 16. $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 17. *Soit f un endomorphisme autoadjoint. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.*

Corollaire 18. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Si $A\in S_n(\mathbb{R})$, il existe D diagonale et $P\in O_n(\mathbb{R})$ tels que $D=P^TAP$.*

Exemple 19. Les matrices symétriques complexes ne sont pas nécessairement diagonalisables. Par exemple, $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2i\end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.

Théorème 20. *Soit q une forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.*

Proposition 21. *Soit $M\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N\in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que :*

$$P^TMP=I_n \quad \text{et} \quad P^TNP=D$$

2.2 Applications

Proposition 22. *Soit $f\in S_n^{+}(\mathbb{R})$. Il existe un unique $h\in S_n^{+}(\mathbb{R})$ tel que $f=h^2$, et h est un polynôme en f.*

Théorème 23. *(Décomposition polaire)*

Pour tout $M\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $O,S\in O_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M=OS$.

Développement 1 :

Théorème 24. *L'exponentielle de matrices définit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

2.3 Endomorphismes normaux.

Proposition 25. *f est un endomorphisme normal si et seulement si $\|f(x)\|=\|f^*(x)\|$ pour tout $x\in E$.*

Proposition 26. *Soit f un endomorphisme normal et E_λ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ est f^*-stable et f-stable.*

Proposition 27. *Soit M matrice normale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de spectre vide dans $\mathbb{R}$. Alors M est semblable à une matrice de rotation $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$, avec $b\neq 0$.*

Théorème 28. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *f est normal.*
- *f est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de E.*
- *f et f^* sont codiagonalisables dans une base orthonormale de vecteurs propres de E.*

Théorème 29. *Si f est normal, il existe une base orthogonale de E dans laquelle la matrice de f est :*

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & (0)\\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \tau_1 & & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & \tau_s\end{pmatrix}$$

Où $\lambda_i\in\mathbb{R}$ et $\tau_j=\begin{pmatrix}a_j&-b_j\\b_j&a_j\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation.

Exemple 30. Les matrices antisymétriques réelles et les matrices orthogonales sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

3 Endomorphismes orthogonaux

3.1 Résultats généraux

Proposition 31. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $f\in O_n(\mathbb{R})$
- $\forall x,y\in E \quad \langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$
- $\forall x\in E \quad \|f(x)\|=\|x\|$

Théorème 32. *$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 33. *Soit $f\in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(f)\in\{-1,1\}$.*

Le déterminant est donc un morphisme de groupes entre $O_n(\mathbb{R})$ et $\{-1,1\}$: on note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ son noyau, appelé groupe spécial orthogonal. C'est un sous-groupe distingué de $O_n(\mathbb{R})$.

Exemple 34. $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Proposition 35. *f est orthogonale si et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.*

Proposition 36. *Les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.*

Théorème 37. *(Réduction des isométries)*

Soit f un endomorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & & \\ & & R(\theta_r) & & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & & \\ & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

Où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, avec $\theta_i \in \mathbb{R}$ et $\theta_i \not\equiv 0\,[\pi]$.

Théorème 38. *$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, c'est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

3.2 Dimension 2 et 3

Proposition 39.

- *Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.*
- *Les matrices de $O_2^-(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.*

Proposition 40. *Les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ sont semblables à :*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Où $\varepsilon = 1$ pour les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ pour les matrices de $O_3^-(\mathbb{R})$.

Corollaire 41. *Pour $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on a alors $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos(\theta) + 1$.*

Proposition 42. *Pour $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ distinct de l'identité, l'endomorphisme associé à A est une rotation par rapport à l'axe $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, dont l'angle est donné par $\theta = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}\right)$.*

Développement 2 :

Théorème 43. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *est simple.*