P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Devs :

- Théorème des extrema liés
- Invariants de similitude

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Gourdon, Analyse
3. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
4. Objectif Agrégation

1 Formes linéaires. Définitions et propriétés.

Définition 1. *On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans k. L'ensemble $\mathcal{L}(E,k)$ des formes linéaires de E dans k est aussi noté E^*. C'est le dual de E.*

Exemple 2. Si $E=k_n[X]$, l'application $\varphi\colon P\mapsto P(0)$ est une forme linéaire de $\mathcal{L}(k_n[X],k)$.

Si $E=\mathbb{R}_n[X]$, $\psi\colon P\mapsto \int_0^1 P(t)\,dt$ est une forme linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$.

Si $E=\mathcal{M}_n(k)$, $\mathrm{Tr}\colon A\mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(k),k)$.

Proposition 3. *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X=(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire réel. La loi de X est entièrement déterminé par sa fonction caractéristique, donnée pour tout $t\in\mathbb{R}^n$ par $\varphi_X(t):=\mathbb{E}[e^{i\langle X,t\rangle}]$, où $\langle x,t\rangle:=x_1t_1+\dots+x_nt_n$ défini une forme linéaire sur Ω^n pour tout $t\in\mathbb{R}^n$.*

Théorème 4. *$\mathcal{M}_n(k)$ est isomorphe à son dual. De plus, toute forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(k)$ vérifiant $f(XY)=f(YX)$ est colinéaire à la trace.*

Application 5. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(k)$ coupe $\mathrm{GL}_n(k)$.

Application 6. On suppose $\mathrm{car}(k)=0$. Soit $\varphi\colon\mathcal{M}_p(k)\to\mathcal{M}_n(k)$ un morphisme d'algèbre. Alors p divise n.

Proposition 7. *Une forme linéaire est nulle ou surjective.*

Théorème 8. *(Théorème de Riesz)*
Soit H espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue f sur E, il existe un unique $x_f\in E$ tel que $f(a)=\langle x_f,a\rangle$ pour tout $a\in E$. L'application $f\mapsto x_f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Application 9. (Théorème de Radon-Nikodym, version faible)
Soit μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\Omega,\mathcal{A})$ telles que $\mu(A)=0\Longrightarrow\nu(A)=0$ pour tout $A\in\mathcal{A}$. Alors il existe une fonction mesurable $f\colon(\Omega,\mathcal{A})\to(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ telle que pour tout $A\in\mathcal{A}$:

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu$$

Application 10. Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien et $f\colon E\to\mathbb{R}$ une application différentiable en $a\in E$. Par définition, $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire continue sur E.

Il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$ tel que $\mathrm{d}f(a)\cdot h=\langle\nabla f(a),h\rangle$ pour tout $h\in E$. On appelle $\nabla f(a)$ le gradient de f en a. Il dépend du produit scalaire choisi sur E.

Définition 11. *On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.*

Proposition 12. *Tout hyperplan H de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

2 Espace dual.

2.1 Base duale

Définition 13. *Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $B^*=(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de E^*, où $e_i^*(e_j):=\delta_{ij}$. On l'appelle la base duale de B.*

Proposition 14. *On a donc $\dim(E)=\dim(E^*)$, et pour tout $\varphi\in E^*$, $\varphi=\sum_{i=1}^n\varphi(e_i)\,e_i^*$.*

En particulier, $E\simeq E^*$. Cet isomorphisme n'est cependant pas canonique, et dépend de la base choisie.

Proposition 15. *Soit $x,y\in E$. Alors $x=y$ si et seulement si $\varphi(x)=\varphi(y)$ pour tout $\varphi\in E^*$.*

Proposition 16. *Soit $\varphi_1,\dots,\varphi_p\in E^*$, et $\varphi\colon E\to k^p$ définie par $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$. Alors φ est surjective si et seulement si $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ sont linéairement indépendantes.*

2.2 Bidual, antédual

Définition 17. *On appelle bidual de E l'espace $E^{**}=(E^*)^*$.*

Théorème 18. *Si $x\in E$, on note $\tilde{x}$: $\left\{\begin{array}{lll} E^* & \rightarrow & k \\ \varphi & \mapsto & \varphi(x) \end{array}\right.$.*

On a alors $\tilde{x}\in E^{**}$ et l'application f: $\left\{\begin{array}{lll} E & \rightarrow & E^{**} \\ x & \mapsto & \tilde{x} \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

Remarque 19. Cet isomorphisme est canonique, et ne dépend pas du choix d'une base. On convient d'identifier E à E^{**} en identifiant x à $\tilde{x}$ pour $x\in E$.

En dimension infinie, f est injective mais pas surjective.

Proposition 20. *Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on ait $e_i^*=f_i$. Cette base s'appelle la base antéduale de $(f_1,\ldots,f_n)$.*

Exemple 21. La famille $(f_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ donnée par $f_{ij}:=\mathrm{Tr}(E_{ij}\cdot)$ est une base de $\mathcal{M}_n(k)^*$.

Sa base antéduale est donnée par $e_{ij}:=E_{ji}$.

3 Transposition et orthogonalité

3.1 Orthogonalité par rapport à une forme linéaire.

Définition 22. *Des éléments $x\in E$ et $\varphi\in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x)=\langle\varphi,x\rangle=0$.*

Définition 23.

Si $A\subset E$, on note $A^\perp=\{\varphi\in E^* : \forall x\in A \quad \varphi(x)=0\}$. $A^\perp$ est appelé orthogonal de A.

Si $B\subset E^*$, on note $B^\circ=\{x\in E : \forall\varphi\in B \quad \varphi(x)=0\}$. B° est appelé orthogonal de B.

Proposition 24. *Les sous-ensembles $A^\perp$ et B° sont des sous-espaces vectoriels de E^* (resp de E).*

Remarque 25. Si $\varphi\in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ.

Proposition 26. *On donne quelques propriétés :*

- *Si $A_1\subset A_2\subset E$ alors $A_2^\perp\subset A_1^\top$.*
- *Si $B_1\subset B_2\subset E^*$, alors $B_2^\circ\subset B_1^\circ$.*
- *Si $A\subset E$, alors $A^\perp=(\mathrm{Vect}\,A)^\perp$.*
- *Si $B\subset E$, alors $B^\circ=(\mathrm{Vect}\,B)^\circ$.*

Théorème 27.

1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\dim F+\dim F^\perp=\dim E$ et $(F^\perp)^\circ=F$.*
2. *Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, $\dim G+\dim G^\circ=\dim E$ et $(G^\circ)^\perp=G$.*

Remarque 28. En dimension infinie, l'égalité $F^{\perp\circ}=F$ est vraie, mais on a seulement l'inclusion $G\subset G^{\circ\perp}$.

Application 29. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F=E\Longleftrightarrow F^\perp=\{0\}$.

Théorème 30. *(Equation d'un s.e.v en dimension finie)*

- *Soit p formes linéaires $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ de E^* telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)=r$. Le sous-espace vectoriel $F=\{x\in E : \forall i\in[\![1,p]\!] \quad \varphi_i(x)=0\}$ est de dimension $n-r$.*
- *Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-q}$ telles que $F=\{x\in E : \forall i\in[\![1, n-q]\!] \quad \varphi_i(x)=0\}$.*

Exemple 31. L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur un hyperplan de E forme une droite vectorielle de E^*.

Application 32.

Soit A_1,A_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $(A_1+A_2)^\perp=A_1^\perp\cap A_2^\perp$, et $(A_1\cap A_2)^\perp=A_1^\perp+A_2^\perp$.

Soit B_1,B_2 deux sous-espaces vectoriels de E^*. Alors $(B_1+B_2)^\circ=B_1^\circ\cap B_2^\circ$ et $(B_1\cap B_2)^\circ=B_1^\circ+B_2^\circ$.

Remarque 33. Dans un espace de Hilbert H, l'orthogonalité du produit scalaire et l'orthogonalité au sens des formes linéaires correspondent, grâce au théorème de Riesz : pour $f\in E^*$ et $x\in E$ tel que $f=\langle x,.\rangle$, on a $f(y)=0\Longleftrightarrow\langle x,y\rangle=0$ pour tout $y\in E$.

3.2 Transposition

Définition 34. *Soit E et F deux k-espaces vectoriels de dimension finie, et $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $f\in F^*$, on a $f\circ u\in E^*$. L'application $\left\{\begin{array}{lll} F^* & \rightarrow & E^* \\ f & \mapsto & f\circ u \end{array}\right.$ est appelée transposée de u et notée u^T.*

Proposition 35. *On a :*

1. $\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(u^T)$
2. $\mathrm{Im}(u^T)=(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$
3. $\mathrm{Ker}(u^T)=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$

Proposition 36. *Soit E, F, G trois k-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $(v \circ u)^T = u^T \circ v^T$.*

Proposition 37. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^T.*

Remarque 38. Si E est un espace euclidien, alors pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $f^T = f^*$, où f^* désigne l'adjoint de f.

Proposition 39. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, B une base de E et B' une base de F. On note B^* et B'^* leurs bases duales respetives. Alors :*

$$\mathrm{mat}_{B,B'}(f)^T = \mathrm{mat}_{B^*,B'^*}(f^T)$$

Théorème 40. *(Formule de changement de base dans le dual)*

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ des bases de E, B^* et B'^* leurs bases duales respectives.

Notons $C := P_B^{B'} = \mathrm{mat}_{B',B}(\mathrm{Id}_E)$ la matrice de passage de la base B à la base B'.

Alors la matrice de passage de B^* à B'^* est $(C^{-1})^T$. Autrement dit :

$$P_{B^*}^{B'^*} = (P_{B'}^{B})^T$$

4 Applications

4.1 Base (anté)duale et polynômes

Théorème 41. *On suppose que $\mathrm{car}(k) = 0$. Alors tout polynôme $P \in k_n[X]$ vérifie :*

$$\forall a \in k \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Fixons $a \in k$ et posons $\varphi_i : P \mapsto P^{(i)}(a)$. Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $k_n[X]^*$, et sa base antéduale est $(Q_1, \ldots, Q_n)$, où $Q_i(X) = \dfrac{(X-a)^k}{k!}$.

Théorème 42. *Soit $a_1, \ldots, a_n \in k$ deux à deux distincts.*

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\varphi_i : P \mapsto P(a_i)$. Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $k_n[X]^*$ et sa base antéduale est $(L_1, \ldots, L_n)$ où $L_i(X) = \dfrac{\prod_{j \neq i}(X-a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$ est le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange associé à $(a_1, \ldots, a_n)$.

Corollaire 43. *Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il existe des réels $c_0, \ldots, c_n$ tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} c_i P(a_i)$.*

4.2 Calcul différentiel

Développement 2 :

Théorème 44. *(Théorème des extrema liés)*

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\Gamma = \{x \in U \ : \ \forall i \in [\![1,n]\!] \quad g_i(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extrémum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \ldots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors $df(a) \in \mathrm{Vect}(dg_1(a), \ldots, dg_r(a))$ et ses coordonnées sont les multiplicateurs de Lagrange de a.

Application 45. On applique le théorème des extrema liés à $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$ et à $\Gamma = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. On retrouve l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{i=1}^n x^i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

Application 46. (Inégalité de Hadamard)

Pour tout $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|$, avec égalité si et seulement si un des v_i est nul ou si les v_i forment une base orthogonale de E.

4.3 Invariants de similitude

Notation 47. *Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(f)(x) = 0\}$, et E_x l'ensemble $\{P(f)(x) : \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.*

Dans la suite, on notera k le degré de π_f et ℓ_x le degré de P_x pour $x \in E$.

Proposition 48. *L'ensemble E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension ℓ_x, dont une base est $(x, \ldots, f^{\ell_x - 1}(x))$.*

Théorème 49. *Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$.*

Définition 50. *On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $k = \deg(\pi_f) = n$, ou encore que $\pi_f = (-1)^n \chi_f$, où χ_f désigne le polynôme caractéristique de f.*

Développement 2 :

Théorème 51. *(Invariants de similitude)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite finie $F_1, \ldots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous stables par f, telle que

1. *$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,*
2. *pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique,*
3. *si $P_i = \pi_{f_i}$, on a $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$.*

La suite $P_1, \ldots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Application 52. (réduction de Frobenius)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_r$ la suite des invariants de similitude de f. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\mathcal{C}(P_1), \ldots, \mathcal{C}(P_r))$. On a $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \cdots P_r$ est le polynôme caractéristique de f, à un facteur $(-1)^n$ près.