P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Devs :

- Décomposition de Dunford
- Morphismes de $\mathcal{S}^1$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Objectif Agrégation

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif k, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 Endomorphismes trigonalisables

1.1 Polynômes d'endomorphismes

Proposition 1. *$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une k-algèbre.*

L'application $\varphi_f \colon \begin{cases} (k[X], +, \times) & \to & (\mathcal{L}(E), +, \circ) \\ P & \mapsto & P(f) \end{cases}$ est un morphisme de k-algèbre. Son noyau est un idéal de $k[X]$, appelé idéal annulateur de f.

L'ensemble $\{P(f) \mid P \in k[X]\}$ est alors une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 2. *$k[X]$ étant principal, il existe un unique polynôme unitaire $P \in k[X]$ tel que $(P) = \operatorname{Ker} \varphi_f$. Ce polynôme s'appelle polynôme minimal de f, et est noté μ_f.*

Proposition 3. *Soit $\lambda \in k$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \mu_f(\lambda) = 0$.*

Théorème 4. *(Lemme des noyaux)*
Soit $P = P_1 \cdots P_r \in k[X]$ tels que $P_1, \ldots, P_r$ soient premiers entre eux deux à deux. Alors :

$$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f)$$

Définition 5. *On appelle polynôme caractéristique de A (resp. de f) le polynôme de $k[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$ (resp. $\chi_f(X) = \det(f - X\,\mathrm{Id})$).*

Proposition 6. *χ_A est un polynôme de degré n. Si $\chi_A = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on a $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\mathrm{Tr}(A)$ et $a_0 = (-1)^n \det(A)$.*

Théorème 7. *(Cayley-Hamilton)*
On a $\chi_f(f) = 0$. Autrement dit, $\mu_f \mid \chi_f$.

Corollaire 8. *Les valeurs propres de f sont racines de son polynôme caractéristique (en fait, ce sont les seules).*

1.2 Trigonalisation

Définition 9. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure. On dit que B trigonalise f.*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 10. *Si f est trigonalisable, les coefficients diagonaux de sa matrice dans une base adaptée sont les valeurs propres de f. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de f, chacune de multiplicité algébrique $m_a(\lambda_i)$, on a alors $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{r} m_a(\lambda_i)\, \lambda_i$ et $\det(f) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_a(\lambda_i)}$.*

Théorème 11. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur K.*

Corollaire 12. *Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable sur K.*

Exemple 13. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

1.3 Trigonalisation simultannée

Proposition 14. *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors les sous-espaces propres de f sont g-stables.*

Proposition 15. *Soit f et g deux endomorphismes trigonalisables qui commutent. Alors il existe une base commune de trigonalisation. On dit que f et g sont cotrigonalisables.*

Proposition 16. *On prend $K = \mathbb{C}$. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg = 0$. Alors f et g sont cotrigonalisables.*

2 Nilpotence

2.1 Noyaux itérés

Proposition 17. *La suite $(\operatorname{Ker} f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire. La suite $(\operatorname{Im} f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et stationnaire.*

Définition 18. *On appelle indice de f le plus petit entier p tel que $\operatorname{Ker} f^{p+k} = \operatorname{Ker} f^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Théorème 19. *On a $p \leq n$ et $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.*

2.2 Endomorphismes nilpotents

Définition 20. *On dit que f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.*

Exemple 21. La dérivation $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{C}_n[X]$ est nilpotente.

Définition 22. *On appelle indice de nilpotence le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. L'indice de nilpotence est exactement l'indice de f (définition 18).*

Développement 1 :

Lemme 23. *Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente non nulle, alors il existe $X \in \mathrm{Ker}(N^2) \setminus \mathrm{Ker}(N)$.*

Application 24. Les morphismes continus de $\mathbb{U}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de la forme :

$$\varphi : e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 25. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *f est nilpotent.*
- $\chi_f = (-1)^n X^n$.
- *Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_f = X^p$.*
- *f est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.*
- *f est trigonalisable et sa seule valeur propre est zéro.*

Proposition 26. *On suppose que $\operatorname{car}(K) = 0$. Alors f est nilpotent si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Tr}(f^k) = 0$.*

Remarque 27. Si $K = \mathbb{F}_p$, le résultat est faux, par exemple en prenant $g = \mathrm{Id}_{(\mathbb{F}^p)^p}$.

2.3 Le cône nilpotent

Proposition 28. *$\mathcal{N}(E)$ est un cône : pour f nilpotent et $\lambda \in K$, l'endomorphisme λf est encore nilpotent.*

Remarque 29. $\mathcal{N}(E)$ n'est pas stable par addition. Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est somme de deux matrices nilpotentes, mais elle est inversible.

Proposition 30. *Pour $M \in \mathcal{M}_2(K)$, $\chi_M = X^2 - \operatorname{Tr}(M)\, X + \det M$.*

Corollaire 31. *$M \in \mathcal{M}_2(K)$ est nilpotente si et seulement si $\operatorname{Tr}(M) = \det(M) = 0$. L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(K)$ est décrit ainsi : $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : -a^2 - bc = 0 \right\}$.*

Proposition 32. *Soit $u, v \in \mathcal{N}(E)$. Si u et v commutent, alors $u + v$ est nilpotent.*

Proposition 33. *Soit u et f deux endomorphismes de E avec u nilpotent. Si u et f commutent, alors $u \circ f = f \circ u$ est nilpotent.*

Théorème 34. *On a $\operatorname{Vect}(\mathcal{N}(E)) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Tr}(u) = 0\}$.*

3 Application à la réduction

3.1 Décomposition de Dunford

Développement 2 :

Proposition 35. *Soit $P = P_1 \cdots P_r$ un polynôme annulateur de f avec $P_1, \ldots, P_r$ premiers entre eux deux à deux. On a $E = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(f)$, et la projection sur $\mathrm{Ker}\, P_i(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}\, P_j(f)$ est un polynôme en f.*

Théorème 36. *(Décomposition de Jordan-Chevalley)*

On suppose que χ_f est scindé sur k. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

- *d est diagonalisable, n est nilpotent.*
- *$f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$*

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Proposition 37. *On considère une norme d'algèbre $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(k)$, par exemple la norme d'opérateur. On rappelle que $(\mathcal{M}_n(k), \|.\|)$ est alors un espace de Banach.*

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente, donc convergente.

Définition 38. *On note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.*

Proposition 39. *Si $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente, alors :*

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$$

Remarque 40. Si χ_A est scindé sur k, la réduction de Jordan-Chevalley donne alors une méthode simple pour calculer $\exp(A)$. En effet, $\exp(D)$ se calcule facilement par la proposition 50, et le calcul de $\exp(N)$ est immédiat puisque $N^n = 0$ implique que $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.

3.2 Endomorphismes cycliques et réduction de Frobenius

Notation 41. *Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(f)(x) = 0\}$, et E_x l'ensemble $\{P(f)(x) : P \in \mathbb{K}[X]\}$.*

Dans la suite, on notera k le degré de π_f et ℓ_x le degré de P_x pour $x \in E$.

Proposition 42. *L'ensemble E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension ℓ_x, dont une base est $(x, \dots, f^{\ell_x - 1}(x))$.*

Théorème 43. *Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$.*

Définition 44. *On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $k = \deg(\pi_f) = n$, ou encore que $\pi_f = (-1)^n \chi_f$, où χ_f désigne le polynôme caractéristique de f.*

Définition 45. *Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $\mathcal{C}(P)$ (voire annexe).*

Proposition 46. *Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathcal{C}(P)}$ de $\mathcal{C}(P)$ vérifie $\chi_{\mathcal{C}(P)} = (-1)^p P$.*

Développement 2 :

Théorème 47. *(Invariants de similitude)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite finie $F_1, \dots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous stables par f, telle que

1. *$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,*
2. *pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique,*
3. *si $P_i = \pi_{f_i}$, on a $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$.*

La suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Application 48. (réduction de Frobenius)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ la suite des invariants de similitude de f. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$. On a $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \cdots P_r$ est le polynôme caractéristique de f, à un facteur $(-1)^n$ près.