P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 156. Exponentielle de matrices. Applications.

Devs :

- Morhphismes continus de $\mathcal{S}^1$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- L'exponentielle de matrice $\exp\colon S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Mneime & Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie
3. Zavidovique, Un max de maths
4. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel
5. Coron, Control and nonlinearity

Dans tout ce qui suit, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Construction de l'exponentielle de matrices

1.1 Topologie sur $\mathcal{L}(E,F)$

On se donne E et F deux espaces vectoriels sur K.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *f est continue sur E,*
- *f est continue en 0,*
- *f est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ de E,*
- *il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M\,\|x\|$ pour tout $x \in E$,*
- *f est lipschitzienne,*
- *f est uniformément continue sur E.*

Définition 2. *L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$. C'est un espace vectoriel normé, muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F) \quad |||f||| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|.$$

Proposition 3. *Soit E, F, G trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et on a $|||g \circ f||| \leq |||g||| \cdot |||f|||$: la norme d'opérateur est une norme d'algèbre.*

Théorème 4. *L'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach.*

Proposition 5. *Soit E un espace de Banach, et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.*

1.2 Exponentielle de matrices

Proposition 6. *La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{M}_n(K)$. On en déduit que cette série converge en tout point de $\mathcal{M}_n(K)$.*

Définition 7. *On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.*

Proposition 8. *On a $|||\exp(A)||| \leq \exp(|||A|||)$.*

Proposition 9. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.*

Remarque 10. Le résultat est faux si A et B ne commutent pas. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 11. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(K)$, et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.*

Proposition 12. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(A^T) = \exp(A)^T$ et $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$.*

Proposition 13. *Si $P \in \mathrm{GL}_n(k)$, on a $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.*

2 Calcul et propriétés de exp

2.1 Décomposition de Dunford et calcul pratique

Proposition 14. *Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice $r \geq 1$. On a $\exp(N) = I_n + N + \cdots + \dfrac{N^{r-1}}{(r-1)!}$.*

Proposition 15. *Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.*

Proposition 16. *Soit $P = P_1 \cdots P_r$ un polynôme annulateur de f avec $P_1, \ldots, P_r$ premiers entre eux deux à deux. On a $E = \mathrm{Ker}\,P_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,P_r(f)$, et la projection sur $\mathrm{Ker}\,P_i(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}\,P_j(f)$ est un polynôme en f.*

Théorème 17. *(Décomposition de Dunford ou Jordan-Chevalley)*
On suppose que χ_f est scindé sur k. Alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

- *d est diagonalisable, n est nilpotent.*

- *$f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$*

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Remarque 18. Si χ_A est scindé sur k, la réduction de Jordan-Chevalley donne alors une méthode simple pour calculer $\exp(A)$. En effet, $\exp(D)$ et $\exp(N)$ se calculent facilement.

Cependant, il est parfois difficile de calculer la décomposition de Dunford.

2.2 Propriétés topologiques

Proposition 19. *L'espace vectoriel $K[A]$ des polynômes en A est de dimension finie, donc fermé.*

Corollaire 20. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, la matrice $\exp(A)$ est un polynôme en A.*

Théorème 21. *L'application $\exp\colon \mathcal{M}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même analytique). Sa différentielle en 0 est l'identité.*

Corollaire 22. *L'exponentielle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinnage de 0 dans $\mathcal{M}_n(K)$ et un voisinnage de Id dans $\mathrm{GL}_n(K)$.*

Proposition 23. *On considère la fonction $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Pour tout $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la formule suivante :*

$$D\det(X)\cdot H = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(X)^T H).$$

Application 24. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ indépendante de t, on a $\det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Tr}(A)}$.

Développement 1 :

Théorème 25.

Les morphismes continus de $\mathbb{U}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de la forme :

$$\varphi\colon e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2.3 Injectivité, surjectivité

Remarque 26. L'exponentielle de matrices, en général, n'est pas injective. Par exemple, l'égalité $\exp(A) = I_n$ n'entraînne pas $A = 0$ (prendre $A = \begin{pmatrix} 2ik\pi & 0 \\ 0 & 2ik\pi \end{pmatrix}$).

Lemme 27. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Lemme 28. *$\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe dans $\mathbb{C}[A]$.*

Théorème 29. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.*

Corollaire 30. *L'exponentielle de matrices $\exp\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.*

Corollaire 31. *On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.*

Définition 32. *Si $A \in B(I_n, 1)$, on appelle logarithme de A et on note $\mathrm{Log}\,A$ la somme de la série normalement convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(A-I_n)^n}{n}$.*

Définition 33. *On désigne par n^p l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre p, et N_p celui des matrices unipotentes d'ordre p, c'est-à-dire les matrices $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $B = A + I_n$ où $A \in n_p$.*

Théorème 34. *L'exponentielle de matrices $\exp\colon n_p \to N_p$ est un homéomorphisme, dont l'inverse est donné par Log.*

Développement 2 :

Théorème 35. *L'exponentielle de matrices $\exp\colon \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

Théorème 36. *(décomposition polaire)*

La multiplication matricielle induit des homéomorphismes :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

via $(O, S) \mapsto OS$ et $(U, H) \mapsto UH$.

Corollaire 37. *Compte tenu du théorème 35, on en déduit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.*

3 Application à l'étude des équations différentielles linéaires

3.1 Résolvante et formule de Duhamel

On se donne un intervalle $]T_0, T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}_0)\colon \begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $A \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $b \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^n)$.

Définition 38. *On appelle résolvante du système homogène $x'(t) = A(t)\,x(t)$ l'application R définie par*

$$R\colon \begin{cases} [T_0,T_1]^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (t_1,t_2) & \mapsto & R(t_1,t_2) \end{cases},$$

de sorte que pour tout $t_2 \in [T_0,T_1]$, l'application $R(\cdot,t_2)\colon \begin{cases} [T_0,T_1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t_1 \mapsto R(t_1,t_2) \end{cases}$ est solution du problème de Cauchy $M'(t) = A(t)\,M(t)$, $M(t_2) = I_n$.

Proposition 39. *La résolvante R vérifie les propriétés suivantes.*

1. *$R \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.*
2. *$\forall t_1 \in [T_0,T_1] \quad R(t_1,t_1) = I_n$.*
3. *$\forall (t_1,t_2,t_3) \in [T_0,T_1]^3 \quad R(t_1,t_2)\,R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3)$.*

De plus, si $A \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors $R \in \mathcal{C}^1([T_0,T_1]^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et on a, pour tout $(t,\tau) \in [T_0,T_1]^2$:

$$\frac{\partial R}{\partial t_1}(t,\tau) = A(t)\,R(t,\tau) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial t_2}(t,\tau) = -R(t,\tau)\,A(\tau).$$

Théorème 40. *On suppose que pour tout $(t,\tau) \in [T_0,T_1]^2$, on a*

$$A(t)\,A(\tau) = A(\tau) A(t). \qquad (1)$$

Alors la résolvante s'obtient par la formule

$$R(t_1,t_2) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right).$$

Remarque 41. Dans le cas où les coefficients ne dépendent pas du temps, cette formule s'écrit alors

$$R(t_1,t_2) = e^{A(t_2-t_1)}.$$

Théorème 42. *(Formule de Duhamel)*

La solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ vérifie :

$$\forall (t_0,t_1) \in [T_0,T_1]^2 \qquad x(t_1) = R(t_1,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} R(t_1,s)\,b(s)\,ds.$$

Cette formule s'obtient via la méthode dite de « variation de la constante ».

3.2 Contrôle des EDL

On se donne un intervalle $]T_0,T_1[$ de $\mathbb{R}$, et on considère problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0)\colon \begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $A \in L^\infty(]T_0,T_1[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in L^\infty(]T_0,T_1[, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ et $u \in L^\infty(]T_0,T_1[, \mathbb{R}^m)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 43.

On dit que le système $x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ est contrôlable si pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^\infty(]T_0,T_1[, \mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x \in \mathcal{C}^0(]T_0,T_1[, \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_0)$ vérifie $x(T_0) = x_0$ et $x(T_1) = x_1$.

Définition 44. *On définit le Gramian de contrôlabilité du système $x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ comme la matrice $\mathfrak{C} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\mathfrak{C} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)\,B(s) B(s)^T R(T_1,s)^T\,ds,$$

où M^T signifie la transposée de M.

Théorème 45. *Le système de contrôle $x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ est contrôlable si et seulement si son Gramian de contrôle $\mathfrak{C}$ est inversible, et dans ce cas, une fonction de contôle $\bar{u}$ est donnée par*

$$\forall \tau \in [T_0,T_1] \qquad \bar{u}(\tau) = B(\tau)^T R(T_1,\tau)^T \mathfrak{C}^{-1}(x_1 - R(T_1,T_0)\,x_0)$$

Théorème 46. *(Condition de Kalman indépendante du temps)*

On suppose que A, B et u ne dépendent pas du temps. Alors le système de contrôle $x'(t) = A x(t) + B u$ est contrôlable sur $[T_0,T_1]$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(A^i\,B u \,:\, u \in \mathbb{R}^m$ et $i \in \{0,\dots,n-1\}) = \mathbb{R}^n$.