P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Devs :

- Invariants de similitude
- Décomposition de Dunford

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Objectif Agrégation
3. Colmez, Eléments d'analyse et d'algèbre

On se donne E un espace vectoriel sur un corps commutatif K et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note π_u le polynôme minimal de u, c'est-à-dire l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X] : P(u) = 0\}$.

1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

1.1 Définitions et illustration

Définition 1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.*

Exemple 2. Le noyau et l'image de u sont stable par u. Les espaces propres de u sont stables par u.

Exemple 3. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Définition 4. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r stable par u. Alors u induit deux endomorphismes : $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $\overline{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient :*

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \\ \downarrow_{u_{|F}} & & \downarrow_{u} & & \downarrow_{\overline{u}} \\ F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \end{array}.$$

Lemme 5. *En gardant les notations de la définition 4, considérons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dont les r premiers vecteurs forment une base $\mathcal{B}_F$ de F, et notons $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_F$. La famille $\pi(\mathcal{B}')$ est une base de E/F que l'on note $\mathcal{B}_{E/F}$.*

Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ et de la forme $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_{E/F}}(\overline{u}).$$

Lemme 6. *L'endomorphisme u est nilpotent si et seulement si $u_{|F}$ et $\overline{u}$ le sont.*

Proposition 7. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$. Si $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E stables par u, alors $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_{|F_1}}, \pi_{u_{|F_2}})$.*

1.2 Sous-espaces cycliques

Notation 8. *On note $K[u]$ l'ensemble $\{P(u) : P \in \mathbb{K}[X]\}$.*

Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(u)(x) = 0\}$, et E_x l'ensemble $\{P(u)(x) : P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Dans la suite, on notera k le degré de π_u et ℓ_x le degré de P_x pour $x \in E$.

Proposition 9. *L'ensemble $K[u]$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension k, dont une base est $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{k-1})$. L'ensemble E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension ℓ_x, dont une base est $(x, \dots, u^{\ell_x - 1}(x))$.*

Théorème 10. *Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_u$.*

Définition 11. *On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $k = \deg(\pi_u) = n$, ou encore que $\pi_u = (-1)^n \chi_u$, où χ_u désigne le polynôme caractéristique de u.*

Définition 12. *Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.*

Proposition 13. *Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathcal{C}(P)}$ de $\mathcal{C}(P)$ vérifie $\chi_{\mathcal{C}(P)} = (-1)^p P$.*

Théorème 14.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit égale à $\mathcal{C}(\pi_f)$.

1.3 Sous-espaces stables et dualité

Définition 15. *Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$.*

Définition 16.
Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in A \quad \varphi(x) = 0\}$. $A^\perp$ est appelé orthogonal de A.
Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E : \forall \varphi \in B \quad \varphi(x) = 0\}$. B° est appelé orthogonal de B.

Proposition 17. *Les sous-ensembles $A^\perp$ et B° sont des sous-espaces vectoriels de E^* (resp de E).*

Théorème 18.

1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\circ = F$.*
2. *Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $(G^\circ)^\perp = G$.*

Théorème 19. *(Lien avec la stabilité).*
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp \subset E^*$ est stable par u^T.

2 Application à la réduction

2.1 Diagonalisation et codiagonalisation

Théorème 20. *(Lemme des noyaux)*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \cdots P_r \in K[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux. Alors

$$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f).$$

Définition 21. *On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f. On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Proposition 22. *(Condition suffisante de diagonalisabilité)*
Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

Théorème 23. *Les propositions suivantes sont équivalents :*

- *f est diagonalisable.*
- *π_f est scindé à racines simples dans k.*
- *χ_f est scindé dans k et $\dim(E_\lambda) = v_\lambda$, où v_λ désigne la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f.*
- *$E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$.*

Corollaire 24. *Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.*

Théorème 25. *(Diagonalisation simultannée).*
Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont des endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors ils sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres : on dit qu'ils sont codiagonalisables.

Définition 26. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure. On dit que B trigonalise f.*
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 27. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur K.*

Théorème 28. *(Trigonalisation simultanée). Si f et g sont trigonalisables et commutent, alors ils sont trigonalisables dans une même base de E.*

2.2 Réductions de Dunford et de Jordan

Développement 1 :

Proposition 29. *Soit $P = P_1 \cdots P_r$ un polynôme annulateur de f avec $P_1, \dots, P_r$ premiers entre eux deux à deux. On a $E = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f)$, et la projection sur $\operatorname{Ker} P_i(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Ker} P_j(f)$ est un polynôme en f.*

Théorème 30. *(Décomposition de Jordan-Chevalley)*
On suppose que χ_f est scindé sur k. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

- *d est diagonalisable, n est nilpotent.*
- *$f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$*

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Application 31. Les morphismes continus de $\mathbb{U}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de la forme $\varphi : e^{it} \mapsto \mathrm{QDiag}(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, 1, \dots, 1)\, Q^{-1}$, où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et R_θ est une matrice de rotation.

Théorème 32. *(Réduction de Jordan, cas nilpotent).*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe une base B dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & v_1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$ *avec $v_i \in \{0, 1\}$.*

Théorème 33. *(Réduction de Jordan).*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur K. On note $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors il existe une base B de E telle que la matrice de f soit de la forme $\operatorname{diag}(J(\lambda_1, \alpha_1), \ldots, J(\lambda_s, \alpha_s))$*, avec* $J(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & v_1 & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & v_{\alpha-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2.3 Invariants de similitude

Développement 2 :

Théorème 34. *(Invariants de similitude)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite finie $F_1, \ldots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous stables par f, telle que

1. *$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$,*
2. *pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique,*
3. *si $P_i = \pi_{f_i}$, on a $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$.*

La suite $P_1, \ldots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Application 35. (réduction de Frobenius)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_r$ la suite des invariants de similitude de f. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\mathcal{C}(P_1), \ldots, \mathcal{C}(P_r))$.

On a $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \cdots P_r$ est le polynôme caractéristique de f, à un facteur $(-1)^n$ près.

Application 36.

Deux endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$ sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.

3 Application aux représentations des groupes finis

On se donne G un groupe fini.

3.1 Généralités sur les représentations

Définition 37. *On appelle représentation linéaire du groupe G la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie et d'un morphisme de groupe $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

Exemple 38. Si $d \geq 1$ est un entier, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est une représentation du groupe $O_d(\mathbb{R})$ via le morphisme d'inclusion $O_d(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Proposition 39. *Pour tout $g \in G$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.*

Définition 40. *(morphisme de représentation)*

Soit V_1 et V_2 deux représentations de G. On appelle morphisme de représentation, ou G-morphisme, une application linéaire $\varphi : V_1 \to V_2$ commutant avec l'action de G, i.e tel que

$$\forall g \in G \quad u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u.$$

On note $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des G-morphismes entre V_1 et V_2, et on dit que V_1 et V_2 sont isomorphes s'il existe un G-morphisme bijectif $\varphi : V_1 \to V_2$. On note alors $V_1 \simeq V_2$.

3.2 Décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles

Définition 41. *On appelle sous-représentation de V un sous-espace vectoriel de V stable par G.*

Définition 42. *On dit que V est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V, ce qui équivaut à dire que pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, la sous-représentation engendrée par v est V. On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles de G.*

Exemple 43. Toute représentation de dimension 1 est irréductible.

Définition 44. *Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G, on peut munir $V_1 \oplus V_2$ (que l'on identifie à $V_1 \times V_2$) via le morphisme*

$$\rho_{V_1 \oplus V_2}(g)(v_1, v_2) = (\rho_{V_1}(g)(v_1), \rho_{V_2}(g)\,(v_2)).$$

La représentation ainsi définie est appelée représentation somme directe de V_1 et V_2..

Théorème 45. *L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ suivante définit un produit scalaire sur V, invariant par l'action de G :*

$$\forall (v_1, v_2) \in V \quad \langle v_1, v_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v_1, g \cdot v_2 \rangle.$$

Théorème 46. *(Maschke, 1899)*

Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.