P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Devs :

- Inégalité de Hadamard (avec le théorème des extrema liés)
- Différentielle du déterminant et application au wronskien

Références :

1. Gourdon, Algèbre
2. Tauvel, Cours d'algèbre
3. Objectif Agrégation
4. Brianes-Pagès, Théorie de l'intégraiton
5. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel

Dans tout le plan, k est un corps commutatif et E désigne un k-espace vetoriel.

1 Formes multilinéaires. Notion de déterminant.

1.1 Formes multilinéaires

Définition 1. *Soit $E_1,\ldots,E_p$ et F des k-espaces vectoriels. Une application :*

$$f\colon E_1\times\cdots\times E_p\to F$$

est dite p-linéaire si en tout point, les p applications partielles sont linéaires. Si $p=2$, f est dite bilinéaire. L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_p,F)$. C'est un k-espace vectoriel.

Si $E_1=\cdots=E_p=E$ et $F=k$, on parle de forme p-linéaire sur E, et l'ensemble des formes p-linéairs sur E est noté $\mathcal{L}_p(E,k)$.

Exemple 2. L'application $E^*\times E\to k$ $(\varphi,x)\mapsto\langle\varphi,x\rangle$ est une forme bilinéaire.

Proposition 3. *Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}_p(E,k)$ est de dimension finie et $\dim\mathcal{L}_p(E,k)=\dim(E)^p$.*

Définition 4. *Soit $f\in\mathcal{L}_p(E,k)$.*

- *f est dite alternée si $f(x_1,\ldots,x_p)=0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.*
- *f est dite antisymétrique si l'échange de deux valeurs dans le p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$ donne à f des valeurs opposées.*

Proposition 5. *f est antisymétrique si et seulement si pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1,\ldots,x_p)\in E^p$, on a $f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})=\varepsilon(\sigma)f(x_1,\ldots,x_p)$.*

Théorème 6. *On suppose que $\mathrm{car}(k)\neq 2$. Soit $f\in\mathcal{L}_p(E,k)$. Alors f est antisymétrique si et seulement si f est alternée.*

Proposition 7. *Soit $f\in\mathcal{L}_p(E,k)$ une forme p-linéaire alternée sur E. Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est une famille liée sur E, alors $f(x_1,\ldots,x_p)=0$.*

Théorème 8. *Soit $f\in\mathcal{L}_p(E,k)$ une forme p-linéaire alternée. On note :*

$$f^{\#}\colon\begin{cases} E^p & \to & k\\ (x_1,\ldots,x_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\end{cases}$$

Alors $f^{\#}$ est une forme p-linéaire alternée.

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dorénavent, E est un espace de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère une matrice $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(k)$.

Définition 9. *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E forme un k-espace vectoriel de dimension 1. De plus, il existe une unique forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E. On l'appelle déterminant dans la base B et on la note $\det_B$.*

Proposition 10. *Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$. On a :*

$$\det_B(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\,x_{1,\sigma(1)}\cdots x_{n,\sigma(n)}$$

Remarque 11. (Changement de base)

Si B et B' sont deux bases de E, alors $\det_{B'}(x_1,\ldots,x_n)=\det_{B'}(B)\det_B(x_1,\ldots,x_n)$.

En particulier, on a $\det_{B'}(B)\cdot\det_B(B')=1$.

Théorème 12. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *La famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée.*
- *Pour toute base B de E, $\det_B(x_1,\ldots,x_n)=0$.*
- *Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1,\ldots,x_n)=0$.*

1.3 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Définition 13. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_B(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det(f)$.*

Proposition 14. *On donne quelques propriétés :*

- *Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$.*
- *On a $\det \mathrm{Id}_E = 1$.*
- *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \det f \neq 0$, et dans ce cas on a $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.*

Définition 15. *On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colones de A dans la base canonique de k^n, et on le note $\det(A)$. On a :*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

On note souvent :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition 16. *On donne quelques propriétés, pour A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(k)$:*

- *On a $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.*
- *On a $\det(A^T) = \det(A)$.*
- *Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base, alors $\det(A) = \det(f)$. En particulier, $A \in \mathrm{GL}_n(k) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$, et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.*
- *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*

1.4 Régularité

Proposition 17. *L'application $A \mapsto \det(A)$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Théorème 18. *$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Développement 1 :

Théorème 19. *Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$. On a :*

$$(D_X \det)(H) = \mathrm{Tr}(\tilde{X}^T H)$$

Corollaire 20. *(Déterminant wronskien)*

Soit $y_1, \ldots, y_n$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $y'(t) = A(t)\, y(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) = \det(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ leur déterminant wronskien. Alors $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t)\, w(t))$. De plus, si A est constante, $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}$.

2 Calcul pratique du déterminant

On considère toujours la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(k)$.

2.1 Cas particuliers

Remarque 21. Si A contient des colones liées linéairement (ou, ce qui se voit plus vite, proportionnelles), on a $\det(A) = 0$.

Proposition 22. *Si A est triangulaire supérieure ou inférieure, $\det(A)$ est simplement le produit des éléments diagonaux de A.*

De manière générale, si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(k)$ avec $A \in \mathcal{M}_p(k)$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(k)$, alors :

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$$

On dit qu'on calcule un déterminant « par blocs ».

Proposition 23. *Pour les cas $n=2$ et $n=3$, on dispose de formules « faciles à retenir » :*

- *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(k)$, alors $\det(A) = ad - bc$.*
- *Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(k)$, alors $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - fha - idb$.*

  C'est la règle de Sarrus.

2.2 Calcul par pivot de Gauss

Proposition 24. *On résume les propriétés de calcul essentielles :*

- *Pour tout $\lambda \in k$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.*
- *Si on effectue une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sur les colones (ou sur les lignes) de A, le déterminant de A est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.*
- *On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant une colone à une combinaison linéaire des autres colones. Même chose sur les lignes.*

Corollaire 25. *On peut calculer le déterminant de manière effective en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, c'est-à-dire en rendant la matrice A triangulaire supérieure après multiplication par des matrices de transvection, dilatation et transposition.*

Exemple 26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

2.3 Mineurs et cofacteurs

Définition 27. *Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.*

Le scalaire $\tilde{a}_{ij}:=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.

Proposition 28. *On a, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:*

- $\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a_{ij}}$ *(développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colone).*
- $\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a_{ij}}$ *(développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne).*

Exemple 29. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1.$

Définition 30. *La matrice $(\widetilde{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A et on la note $\tilde{A}$ ou $\mathrm{com}(A)$.*

Proposition 31. *On a $A\,(\tilde{A})^T=(\tilde{A})^T A=(\det A)\cdot I_n$.*

Si $A\in \mathrm{GL}_n(k)$, on en déduit que $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\tilde{A})^T$.

Remarque 32. Le calcul du déterminant (et plus largement, de l'inverse d'une matrice) par la méthode des cofacteurs offre un intérêt essentiellement théorique, en particulier sur des matrices qui contiennent beaucoup de zéros.

En pratique, l'algorithme du pivot de Gauss est plus efficace numériquement. De fait, la complexité du pivot de Gauss est en $O(n^3)$ opérations, quand celle de la méthode des cofacteurs est en $O(n!)$ opérations, ce qui la rend pratiquement inutilisable sur des matrices de grandes dimensions.

2.4 Déterminants remarquables

Proposition 33. *(Déterminant de Vandermonde)*

Soit $n\geq 2$, et $a_1,\ldots,a_n\in k$. On note :

$$V(a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Alors :

$$V(a_1,\ldots,a_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

Proposition 34. *(Déterminant de Cauchy)*

Soit $a_1,\ldots,a_n\in k$ et $b_1,\ldots,b_n\in k$ tels que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_i+b_j\neq 0$. Alors :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}=\frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

Proposition 35. *(Déterminant circulant)*

Soit $n\geq 2$, $a_0,\ldots a_{n-1}\in\mathbb{C}$ et $\zeta=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}a_q\zeta^{qk}$$

3 Applications.

3.1 Systèmes linéaires

Proposition 36. *On considère le système linéaire $AX=B$ avec $A\in\mathcal{M}_n(k)$, $B\in\mathcal{M}_{n,1}(k)$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{n,1}(k)$.*

Alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, les composantes x_i de X sont données par :

$$x_i=\frac{\det_{\mathcal{B}_0}(A_1,\ldots,A_{i-1},B,A_{i+1},\ldots,A_n)}{\det(A)}$$

Où $A_1,\ldots,A_n$ désignent les vecteurs colones de la matrice A.

Exemple 37. Le système $\begin{cases} 2x+y-z=\alpha\\ y+3z=\beta\\ 2x+y+2z=\gamma\end{cases}$ admet pour solutions $x=\frac{\alpha+3\beta-4\gamma}{-6}$, $y=\alpha+\beta-\gamma$ et $z=-\frac{\alpha}{3}$.

3.2 Polynôme caractéristique

Définition 38. *On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $k[X]$ défini par $\chi_A(X)=\det(A-XI_n)$.*

Remarque 39. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base B de E ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle polynôme caractéristique de f et on le note χ_f.

Proposition 40. *Un élément $\lambda \in k$ est une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$.*

Exemple 41. Si k est algébriquement clos (par exemple $k = \mathbb{C}$), tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ admet au moins une valeur propre.

Proposition 42. *χ_A est un polynôme de degré n.*

En notant $\chi_A(X) = \sum_{i=1}^{n} a_n X^n$, on a $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n+1}\operatorname{Tr}(A)$ et $a_1 = \det(A)$.

Corollaire 43. *(Calcul de χ_A en petite dimension)*

- *Si $n = 2$, on a $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr}(A)\, X + \det(A)$.*
- *Si $n = 3$, on a $\chi_A(X) = -X^3 + \operatorname{Tr}(A)\, X^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}(A^2) - \operatorname{Tr}(A)^2)\, X + \det(A)$*

Théorème 44. *(Cayley-Hamilton)*
On a $\chi_A(A) = 0$: le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.
En particulier, le polynôme minimal de A divise son polynôme caractéristique.

Théorème 45. *A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Définition 46. *Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, on définit sa matrice compagnon par :*

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_{C_P} = P$.

3.3 Géométrie et mesures

Théorème 47. *Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Alors :*

$$\mu(u(X)) = |\det(u)|\, \mu(X)$$

Corollaire 48. *Soit $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n)$ le parallélépipède engendré par $v_1, \ldots, v_n$, c'est-à-dire l'ensemble :*

$$\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n) := \{w \in \mathbb{R}^n \;:\; w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ avec } \lambda_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n\}$$

Alors on a $\mu(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n)) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|$.

Développement 2 :

Théorème 49. [DEV 2] *(Extrema liés)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f, g_1, \ldots, g_n \colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $M = \{x \in U \;:\; g_1(x) = \cdots = g_n(x) = 0\}$. Soit $m \in M$ un extremum local de $f_{|M}$ tel que la famille $(Dg_i(m))_{0 \le i \le n}$ soit libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Dg_i(m)$$

Corollaire 50. *(Inégalité de Hadamard)*
Notons $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \le \|v_1\| \cdots \|v_n\|$$

Théorème 51. *(Déterminant de Gram)*
On suppose que E est muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. On appelle déterminant de Gram le déterminant :

$$G(v_1, \ldots, v_n) := \begin{vmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_1, e_n) & \cdots & \varphi(e_n, e_n) \end{vmatrix}$$

Alors si $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base d'un sous-espace $V \subset E$ et $x \in E$, on a la formule :

$$d(x, V) = \frac{G(v_1, \ldots, v_m, x)}{G(v_1, \ldots, v_m)}$$

Théorème 52. [ADMIS] *(Changement de variable)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ injective et différentiable sur U. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable, et pour $f \in L^1(V)$, on a :

$$\int_V f d\lambda = \int_U f \circ \varphi \cdot |J_\varphi| \cdot d\lambda$$

Exemple 53. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha \|x\|^2} dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}$$