P. Maurer
ENS Rennes

# Leçon 107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

**Devs :**

- Table de caractères de $\mathcal{S}^4$
- Théorème de structure des groupes abéliens finis

**Références :**

1. Colmez, Elements d'analyse et d'algèbre
2. Ulmer, Théorie des groupes
3. Peyre, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier
4. Dos Santos, Groupes finis et leurs représentations (il s'agit d'un polycopié pour le M1 de Paris VI)
5. Caldero, H2G2

Dans tout ce qui suit, on se donne un groupe $G$.

## 1 Représentations linéaires et leurs sous-représentations

### 1.1 Définitions et premiers exemples

**Définition 1.** *On appelle représentation linéaire du groupe $G$ la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ et d'un morphisme de groupe $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

**Convention 2.** On parle indifféremment de la représentation $V$ de $G$ ou de la représentation $\rho_V$ de $G$, suivant qu'on veut mettre l'accent sur l'espace vectoriel $V$ ou le morphisme de $G$ sur $\mathrm{GL}(V)$.

**Exemple 3.** Si $d \geq 1$ est un entier, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est une représentation du groupe $O_d(\mathbb{R})$ via le morphisme d'inclusion $O_d(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

**Exemple 4.** (représentations de $\mathbb{Z}$)

Si $V$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et si $u : V \to V$ un isomorphisme linéaire, l'application $n \mapsto u^n$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}(V)$, ce qui fait de $V$ une représentation linéaire de $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $V$ est une représentation de $\mathbb{Z}$, alors $u = \rho_V(1) \in \mathrm{GL}(V)$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\rho_V(n) = u^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, une représentation de $\mathbb{Z}$ n'est autre que la donnée d'un espace vectoriel $V$ et d'un élément $u \in \mathrm{GL}(V)$.

Dans tout ce qui suit, on supposera que l'espace vectoriel $V$ associé aux représentations linéaires de $G$ est toujours de dimension finie.

**Définition 5.**

*On appelle dimension d'une représentation $(V, \rho_V)$ la dimension de l'espace vectoriel $V$. Si $\dim(V) = d$ et si $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de $V$, on note $R_V(g)$ la matrice de $\rho_V(g)$ dans la base $(e_1, \dots, e_d)$.*

**Proposition 6.** *Si $G$ est fini, alors pour tout $g \in G$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.*

**Définition 7.** *(représentation de permutation, représentation régulière)*

*Si $X$ est un ensemble fini muni d'une action de $G$, on définit la représentation de permutation $V_X$ associée à $X$, comme l'espace vectoriel $V_X$ de dimension $|X|$ et de base $(e_x)_{x \in X}$, muni de l'action linéaire de $G$ donnée par $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.*

*Dans le cas où $G$ est fini, on peut poser $X = G$ et considérer l'action par multiplication à gauche de $G$ sur lui-même. La représentation $V_{\mathrm{reg}} := V_G$ de permutation ainsi obtenue est appelée représentation régulière de $G$.*

**Remarque 8.** Dans la base $(e_x)_{x \in X}$, la matrice d'un élément $g \in G$ est une matrice de permutation, et le terme diagonal $a_{x,x}$ est égal à 1 si et seulement si $g \cdot x = x$, sinon il vaut zéro.

**Définition 9.** *(représentation $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$)*

*Soit $V_1$, $V_2$ deux représentations de $G$, et soit $u : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Si $g \in G$, on définit $g \cdot u : V_1 \to V_2$ par la formule $(g \cdot u)(v) = g \cdot u(g^{-1} \cdot v)$ pour tout $v \in V_1$.*

*Ceci définit une action de $G$ sur $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, et donc $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ est une représentation de $G$ munie du morphisme $\rho_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g)(u) = \rho_{V_2}(g) \circ u \circ \rho_{V_1}(g)^{-1}$.*

**Définition 10.** *(représentation duale)*

*Si $V_1 = V$ et si $V_2$ est la représentation triviale $\mathbb{C}$, la représentation $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ est appelée la représentation duale $V^*$ de $V$.*

**Définition 11.** *(morphisme de représentation)*

*Soit $V_1$ et $V_2$ deux représentations de $G$. On appelle morphisme de représentation, ou $G$-morphisme, une application linéaire $\varphi : V_1 \to V_2$ commutant avec l'action de $G$, i.e tel que*

$$\forall g \in G \quad u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u.$$

*On note $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des $G$-morphismes entre $V_1$ et $V_2$, et on dit que $V_1$ et $V_2$ sont isomorphes s'il existe un $G$-morphisme bijectif $\varphi : V_1 \to V_2$. On note alors $V_1 \simeq V_2$.*

### 1.2 Décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles

On se donne une représentation $(V, \rho_V)$ de $G$.

**Définition 12.** *On appelle sous-représentation de $V$ un sous-espace vectoriel de $V$ stable par $G$.*

**Exemple 13.** Si $v\in V\setminus\{0\}$, $\mathrm{Vect}(g\cdot v:\ g\in G)$ est la sous-représentation de $V$ engendrée par $v$.

**Définition 14.** *On dit que $V$ est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et $V$, ce qui équivaut à dire que pour tout $v\in V\setminus\{0\}$, la sous-représentation engendrée par $v$ est $V$. On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles de $G$.*

**Exemple 15.** Toute représentation de dimension 1 est irréductible.

**Exemple 16.** Soit $n\geq 3$. On considère la représentation $\sigma\colon\mathcal{D}_n\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, où $\mathcal{D}_n$ est le groupe dérivé d'ordre $n$ est $\sigma$ est l'inclusion $\mathcal{D}_{2n}\subseteq\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Alors $\sigma$ est irréductible.

**Définition 17.** *Si $V_1$ et $V_2$ sont deux représentations de $G$, on peut munir $V_1\oplus V_2$ (que l'on identifie à $V_1\times V_2$) via le morphisme*

$$\rho_{V_1\oplus V_2}(g)(v_1,v_2)=(\rho_{V_1}(g)(v_1),\rho_{V_2}(g)\,(v_2)).$$

*La représentation ainsi définie est appelée représentation somme directe de $V_1$ et $V_2$.*

*On définit de même la représentation $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ pour $V_1,\ldots,V_m$ des représentations de $G$.*

On suppose dorénavant que $G$ est un groupe fini.

**Théorème 18.** *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ suivante définit un produit scalaire sur $V$, invariant par l'action de $G$ :*

$$\forall (v_1,v_2)\in V\quad \langle v_1,v_2\rangle:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g\cdot v_1,g\cdot v_2\rangle.$$

**Corollaire 19.** *(Maschke, 1899)*
*Toute représentation de $G$ est somme directe de représentations irréductibles.*

### 1.3 Lemme de Schur et opérateur de la moyenne

On se donne une représentation $(V,\rho_V)$ de $G$ de dimension finie.

**Théorème 20.** *(Lemme de Schur, 1905)*
*Soit $V_1,V_2$ deux représentations irréductibles de $G$.*

*i. Si $V_1$ et $V_2$ ne sont pas isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=\{0\}$.*

*ii. Si $V_1\simeq V_2$, alors tous les éléments de $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ sont des homothéties.*

**Définition 21.** *On définit l'ensemble $V^G$ des éléments de $V$ fixes sous l'action de $G$. C'est une représentation de $G$.*

**Exemple 22.** Soit $V_1$ et $V_2$ deux représentations de $G$, et $H=\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$.

Alors $H^G=\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$.

**Définition 23.** *Si $G$ est fini, on définit l'opérateur de la moyenne $M\colon V\to V$ par*

$$M(v):=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g\cdot v.$$

**Proposition 24.** *L'opérateur de la moyenne est à valeurs dans $V^G$, vérifie $M(v)=v$ pour tout $v\in V^G$. C'est un $G$-morphisme de $V$.*

**Proposition 25.** *On suppose que $G$ est fini et on se donne deux représentations $V_1$ et $V_2$ de $G$.*

1. *Si $V_1$ et $V_2$ sont irréductibles, non isomorphes, et si $u\in\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, alors $M(u)=0$.*
2. *Si $V$ est irréductible, et si $u\in\mathrm{Hom}(V,V)$, alors $M(u)(v)=\frac{1}{\dim(V)}\mathrm{Tr}(u)\cdot v$ pour tout $v\in V$.*

## 2 Théorie des caractères

Dans tout ce qui suit, on suppose que $G$ est fini et on se donne une représentation $(V,\rho_V)$ de dimension finie de $G$.

### 2.1 Caractères de Frobenius et caractères linéaires

**Définition 26.**
*On appelle caractère (de Frobenius) de $V$ l'application $\chi_V\colon G\to\mathbb{C}$ définie par $\chi_V(g):=\mathrm{Tr}(\rho(g))$.*
*Si $V$ est de dimension 1, $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$, donc la représentation $V$ s'identifie à un morphisme de groupes $\chi\colon G\to\mathbb{C}^*$. On appelle caractère linéaire de $G$ un tel morphisme, et on note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de $G$.*

**Proposition 27.** *Si $V$ est une représentation de dimension 1 de $G$ et $\chi$ le caractère linéaire associé, on a $\chi_V=\chi$ : le caractère du caractère linéaire est le caractère linéaire lui-même.*
*Muni du produit $(\chi_1\,\chi_2)(g):=\chi_1(g)\,\chi_2(g)$, l'ensemble $\hat{G}$ des caractères linéaires de $G$ est un groupe commutatif. On l'appelle le groupe dual de $G$.*

**Proposition 28.** *Soit $V_1$ et $V_2$ des représentations de $G$. Alors*

1. $\forall g\in G\quad \chi_V(g^{-1})=\overline{\chi_V(g)}$,
2. $\chi_{V_1\oplus V_2}=\chi_{V_1}+\chi_{V_2}$,
3. $\chi_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}=\overline{\chi_{V_1}}\cdot\chi_{V_2}$,

4. $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

**Proposition 29.** *Si $V_X$ est la représentation de permutation de $G$ associée à un ensemble fini $X$, alors $\chi_{V_X}(g) = \mathrm{Card}(\{x \in X : g \cdot x = x\})$ pour tout $g \in G$.*

*En particulier, le caractère de la représentation régulière est donné par*

$$\chi_{\mathrm{reg}}(1) = |G| \quad \text{et} \quad \chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0 \quad \text{pour } g \in G \setminus \{1\}.$$

## 2.2 Orthogonalité des caractères

**Définition 30.** *On appelle fonction centrale sur $G$ une application $\phi : G \to \mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison de $G$, i.e telle que $\phi(ghg^{-1}) = \phi(h)$ pour tout $g$, $h \in G$. On munit l'espace des fonctions centrales sur $G$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par*

$$\langle \phi, \varphi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)}\, \varphi(g).$$

**Exemple 31.** Les caractères sont des fonctions centrales sur $G$.

**Proposition 32.** *Soit $V$ une représentation irréductible de $G$, et $\phi$ une fonction centrale sur $G$.*

*Alors pour tout $v \in V$, on a*

$$\sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(g)(v) \;=\; \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g) \cdot v.$$

**Théorème 33.** *(orthogonalité des caractères)*

*Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales.*

**Corollaire 34.** *Le nombre de représentations irréductibles de $G$ est égal au nombre $|\mathrm{Conj}(G)|$ des classes de conjugaison de $G$. En particulier, il est fini.*

**Corollaire 35.** *On considère une décomposition de $V$ en sous-représentations irréductibles $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Si $W \in \mathrm{Irr}(G)$, alors le nombre $m_W$ de $W_i$ qui sont isomorphes à $W$ est égal à $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$. En particulier, $V \simeq \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle\, W$.*

**Corollaire 36.** *Deux représentations ayant le même caractère sont isomorphes, et on a $V \in \mathrm{Irr}(G) \Longleftrightarrow \|\chi_V\| = 1$.*

**Proposition 37.** *(Formule de Burnside)*

*Si $W$ est une représentation irréductible de $G$, alors $W$ apparaît dans la représentation régulière avec la multiplicité $\dim W$, et on a*

$$\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W)^2 \;=\; |G|.$$

## 2.3 Table des caractères

**Définition 38.** *Soit $c = |\mathrm{Conj}(G)|$. La table des caractères de $G$ est un tableau $c \times c$ dont les coefficients sont les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaison de $G$, le coefficient à l'intersection de la colonne correspondant au caractère $\chi$ et de la ligne correspondant à la classe de conjugaison $C$, étant $\chi(C)$.*

**Remarque 39.** On peut obtenir toute la table des caractères de $G$ en n'en connaissant qu'une partie grâce aux relation d'orthogonalité des caractères.

**Exemple 40.** Table des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Annexe, fig. 1)

**Remarque 41.** Deux groupes non isomorphes peuvent avoir la même table des caractères.

**Exemple 42.** Table des caractères de $\mathcal{D}_4$ et de $H_8$ (Annexe, fig. 2)

**Théorème 43.** *Les groupes d'isométrie du cube sont $\mathrm{Isom}(C_6) = \mathcal{S}_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Isom}^+(C_6) = \mathcal{S}_4$.*

**Développement 1 :**

**Application 44.** *Table des caractères de $\mathcal{S}_4$. (Annexe, fig. 3)*

# 3 Applications et utilisations des représentations

## 3.1 Caractères et sous-groupes distingués

**Lemme 45.** *Soit $G$ un groupe fini et $(V, \rho_V)$ une représentation de $G$, de caractère $\chi$. Alors pour tout $g \in G$, on a*

1. $|\chi(g)| \leq \chi(e)$,
2. $\chi(g) = \chi(e) \Longleftrightarrow g \in \mathrm{Ker}(\rho_V)$.

**Définition 46.** *Soit $G$ un groupe et $\chi$ un caractère de $G$. On appelle noyau du caractère $\chi$, et on note $\mathrm{Ker}(\chi)$, l'ensemble $\{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.*

**Proposition 47.** *Soit $G$ un groupe fini ayant $m$ classes de conjugaison, et $\chi_1, \ldots, \chi_m$ les caractères irréductibles de $G$. Tout sous-groupe distingué $H$ de $G$ est de la forme*

$$H = \bigcap_{j \in J} \mathrm{Ker}(\chi_j) \quad \text{avec} \quad J \subset \{1, \ldots, m\}.$$

**Exemple 48.** Le seul groupe distingué non trivial de $\mathcal{A}_4$ est le groupe de Klein $V_4$.

**Corollaire 49.** *Un groupe fini $G$ est simple si et seulement si tout caractère irréductible non trivial de $G$ a un noyau trivial.*

### 3.2 Cas des groupes abéliens

**Lemme 50.** *Soit $G$ un groupe abélien et $(V,\rho)$ une représentation irréductible de $G$. Alors* $\dim(V)=1$.

**Remarque 51.** Pour un groupe abélien $G$, $\mathrm{Irr}(G)$ coïncide avec le groupe dual $\hat{G}$.

**Proposition 52.** *Si $G$ est abélien, toute fonction $\phi: G\to\mathbb{C}$ est centrale, et l'ensemble des caractères linéaires $\hat{G}$ forme une base orthonormale des fonctions de $G$ sur $\mathbb{C}$.*

**Proposition 53.** *Soit $G$ un groupe abélien fini.*

1. *Si $x\in G$ est d'ordre $a$ et si $y\in G$ est d'ordre $b$, et si $a\wedge b=1$, alors $xy$ est d'ordre $ab$.*
2. *Si $a,b\in\mathbb{N}^*$ et si $G$ contient des éléments d'ordre $a$ et $b$, alors il contient un élément d'ordre* $\mathrm{ppcm}(a,b)$.
3. *Soit $N$ le maximum des ordres des éléments de $G$. Alors on a $x^N=1$ pour tout $x\in G$. On dit que $N$ est l'exposant du groupe $G$.*

**Développement 2 :**

**Lemme 54.** *Soit $G$ un groupe abélien fini. Alors $G$ est isomorphe à $\hat{\hat{G}}$.*

**Lemme 55.** *Soit $G$ un groupe abélien fini. Alors $G$ et $\hat{G}$ ont le même exposant.*

**Théorème 56.** *(Théorème de structure des groupes abéliens finis, existence)*
*Soit $G$ un groupe abélien fini. Alors il existe $r\in\mathbb{N}$ et des entiers $N_1,\dots,N_r$, où $N_1$ est l'exposant de $G$ et qui vérifient $N_{i+1}|N_i$ pour tout $i\le r-1$, et qui sont tels que*

$$G\simeq\prod_{i=1}^{r}\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}.$$

### 3.3 Transformée de Fourier sur un groupe fini

On se donne un groupe abélien fini $G$, et on note $\mathbb{C}[G]$ l'espace des fonctions de $G$ sur $\mathbb{C}$.

**Définition 57.** *Pour $f\in\mathbb{C}[G]$, on définit pour $\chi\in\hat{G}$, le coefficient de Fourier $c_f(\chi)$ par*

$$\forall\chi\in\hat{G}\quad c_f(\chi):=\langle f,\chi\rangle.$$

**Définition 58.** *L'application transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}$, est définie par*

$$\mathcal{F}:\begin{cases}\mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[\hat{G}]\\ f & \mapsto & \hat{f}\end{cases},$$

*où $\hat{f}$ est définie par*

$$\begin{aligned}\forall\chi\in\hat{G}\quad\hat{f}(\chi) &:= |G|\cdot c_f(\overline{\chi})\\ &= \sum_{\chi\in G} f(x)\,\chi(x).\end{aligned}$$

**Théorème 59.** *(formule d'inversion de Fourier)*
*Pour $f\in\mathbb{C}[G]$, on a la formule d'inversion*

$$f=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}}\hat{f}(\chi)\,\chi^{-1}.$$

**Proposition 60.** *Les applications $c$ et $\mathcal{F}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\hat{G}]$.*

**Théorème 61.** *(formule de Plancherel)*
*Pour $f,g\in\mathbb{C}[G]$, on a*

$$\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G}\hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}.$$

**Remarque 62.** Cette formule est semblable, à une constante près, à celle que l'on obtient pour la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. Elle traduit en effet la conservation du produit scalaire par la transformée de Fourier : $\langle f,g\rangle=\frac{1}{|G|}\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$.

## 4 Annexe

**Fig 1 : Table de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

| | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\cdots$ | $\overline{n-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | $\omega$ | $\cdots$ | $\omega^{n-1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $\chi_n$ | 1 | $\omega^{n-1}$ | $\cdots$ | $\omega$ |

**Fig 2 : Table de $\mathcal{D}_4$ et $\mathbb{H}_8$**

| | $\{1\}$ | $\{-1\}$ | $\{\pm i\}$ | $\{\pm j\}$ | $\{\pm k\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi_3$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_4$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\chi_5$ | 2 | $-2$ | 0 | 0 | 0 |

**Fig 3 : Table de $\mathcal{S}_4$**

| | $[1]$ | $[2]$ | $[2,2]$ | $[3]$ | $[4]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_\varepsilon$ | 1 | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ |
| $\chi_s$ | 3 | 1 | $-1$ | 0 | $-1$ |
| $\chi_W$ | 2 | 0 | 2 | $-1$ | 0 |
| $\chi_C$ | 3 | $-1$ | $-1$ | 0 | 1 |